Math. P. 249.
Mathesis pura. Arithmetica. p. 212.

R

Anfangsgründe
der
arithmetischen Wissenschaft
auf
mathematische Gründe
und
Vernunftschlüsse gebaut,
für Jünglinge.

Vorgetragen

von Ph. J. Karrer
des Ministerii ordin. Kandidaten.

Leipzig und Dünkelsbühl,
bey Friedrich Christoph Schmeisser, privil. Buchhändler
1792.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem
Hochedelgebohrnen und Hochweisen
Herrn
Johann Christoph Küner,
des geheimen Raths,
seinem verehrungswürdigsten Gönner
und
ewig unvergeßlichen Wohlthäter,
als ein
Denkmal der tiefsten Hochachtung,
und
schuldigsten Dankbarkeit
für ganz besondere
Patronanz und Gunstbezeugungen,
unter dem heissesten Wunsche, daß Dero kostbare Lebenstage bey dem höchsten Wohlseyn zum Glück des Vaterlandes bis in das graueste Alter verlängert werden,

ehrfurchtsvoll zugeeignet
von

dem
Verfasser.

Vorrede.

Keine Wissenschaft ist mehr der Gefahr unterworfen, dem Gedächtniß so plötzlich zu entfliehen, als gerade die arithmetische.

Die Ursache davon finde ich in dem mechanischen Unterrichte derselben, welcher den Lehrlingen ertheilet wird, und in dem Mangel richtig vernünftiger Grundsätze, worauf sie gebauet und gegründet ist.

Die Jünglinge erlernen diese Wissenschaft, ohne die Gründe zu kennen, und mit denselbigen bekannt zu seyn, warum sie bey dieser und jener Rechnungsart, so und nicht anderst verfahren dürfen.

Würde die Arithmetick mehr wissenschaftlich, als mechanisch mit ihnen getrieben,

so wären sie theils der Gefahr nicht ausgesetzt, sie wieder so leicht und sobald zu vergessen, theils würde in ihnen die Liebe zu dieser Wissenschaft mehr erregt und unterhalten werden. Ja es würde auch daraus ein noch anderer Vortheil entspringen, sie würden mehr Liebe und Geschmack an der Mathematick, von welcher die Arithmethick die Vorbereitungswissenschaft ist, finden. Und giebt es wohl je eine Wissenschaft, die nebst der Logick, den Jüngling richtig denken lehrt, seinen Verstand entfaltet, ihn helle und lichtvoll macht; die auf alle andere Wissenschaften unaussprechlichen Nutzen verbreitet; die bey unzählig vielen Arbeiten, ohne es zu wissen, angewendet wird, als gerade die Mathematick? Ich darf es aber wohl sagen, fast keine Wissenschaft wird so sehr vernachlässiget, als eben diese nebst der vernünftigen Arithmetick.

In diesen wenigen Bogen bemühte ich mich, die Anfangsgründe der Arithmetick nach Grundsätzen der Mathematick vorzutragen, und sie auf vernunftmässige Gründe festzubauen, sie den Jünglingen faßlich und gründlich zu machen, und ihnen Gründe anzugeben, warum sie so und nicht anderst rechnen müssen. Wer die Gründe, worauf diese Wissenschaft gebaut ist, recht faßt, der wird mit grösserm Vortheil diese Wissenschaft erlernen und anwenden können. Noch hatte ich diese Absicht dabey, Liebe zur Mathematick, als derjenigen Wissenschaft, welche der Schlüssel zu allen übrigen ist, hervorzubringen und zu erhöhen. Ich befließ mich, so viel es mir immer möglich war, der Deutlich- und Gründlichkeit. Exempel habe ich aus der Ursache wenige angeführt; weil ich durch sie diese Bogen nicht vergrößern wollte: ein jeglicher Lehrer, ja selbst Jüngling, der sich dieser kurzen An-

leitung bedient, kann leicht mehrere hinzufügen. Manche Hülfsmittel, die dazu sehr dienlich und zweckmässig sind, habe ich benutzt, und in manchen Stücken, z. E. in der Lehre von den Verhältnissen vorzüglich auf Wolf Rücksicht genommen.

Sollten Kenner und billige Richter finden, daß ich meiner Absicht gemäß arbeitete, und durch diese meine geringe Arbeit der Jugend die Erlernung der arithmetischen Wissenschaft erleichterte, ihr einiges Licht in der Buchstabenrechnung gab, so werde ich mich dadurch für meine Mühe belohnt sehen; und vielleicht entschliessen, die ebene Geometrie auf gleiche Art und Weise zu bearbeiten. Belehrungen werde ich mit Dankbarkeit zweckmässig benutzen.

Mein Wunsch ist dieser, nicht fruchtlos gearbeitet zu haben!

Memmingen, den
1ten Nov. 1791.

Ph. J. Karrer.

1.) Die Arithmetick ist eine Wissenschaft der Zahlen, welche lehret, Zahlen aus Zahlen und ihre Verhältnisse gegeneinander zu finden.

2.) Eine Zahl ist der Inbegriff verschiedener Unitäten, oder einzelner Dinge von einer Art.

3.) Die 4 Species heissen: addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren.

4.) Die Arithmeticker haben gewisse Zeichen, wodurch sie die 4 Species, oder Rechnungsarten ausdrücken. Das Zeichen der Addition ist †: heißt lat. plus, im Deutschen braucht man das Wörtchen und z. B. 8 † (plus und) 6 ist 14. Dieses ist die Summe von 8 und 6. Das Zeichen der Gleichheit ist =: dieses Zeichen wird zwischen diejenigen Zahlen oder Grössen gesetzt, die einander gleich sind: also 8 † 6 = (ist gleich) 14.

Das Zeichen der Subtracktion ist ÷ lat. minus, deutsch weniger: z. B. 16 ÷ (minus, weniger) 9 (ist gleich) 7. Das Multiplications-Zeichen ist ein liegendes Kreuz ×, welches zwischen die 2 multiplicirende Zahlen gesetzt: und deutsch, durch mal ausgesprochen wird z. B. 4 × (mal) 6 = (ist gleich) 24.

Das

Das Divisions Zeichen ist (:) das deutsch durch in ausgesprochen, und zwischen den Divisor und Dividendus gesetzt wird, doch so, daß der Divisor zur linken stehet: z. B. 6 (: ist enthalten) in 24 = 4 mal.

Erste Specis oder Rechnungsart.

Addition.

5.) Addiren heißt, verschiedene Zahlen nach ihren Theilen, (Unitäten) in eine Summe bringen, die jenen gleich ist, z. B. 8 † 6 = 14 d. i. die ersten Zahlen zur linken, nemlich, 8 und 6 sind gleich, (oder geben) 14. Mit Buchstaben a † b = ab, oder auch a † b = c. Wenn der Buchstab a, 12 bedeuten soll, und der Buchstab b 8, so ist a † b = ab, oder a † b = c. d. i. 12 † 8 = 20. da bedeutet also ab, oder c 20.

Anmerkung. 1.) Es ist von den Buchstaben überhaupt zu merken, daß man durch dieselben, sowohl durch die großen, z. E. A. B. C. ꝛc. ꝛc. als auch durch die kleinen a. b. c. ꝛc. ꝛc. eine jede Größe, Anzahl, Vielheit, von 1 in das Unendliche ausdrücken kann: wenn aber a, 8 bedeutet,

tet, so kann b nicht auch 8 bedeuten, sondern man muß eine andere Zahl annehmen, z. B. b kann bedeuten 2, 4, 6, 10, 12, das will so viel sagen b kann nicht die Zahl bedeuten, die a bedeutet.

2. Wann mehrere Zahlen zu addiren sind, so stehen sie also 12 † 8 † 6 † 4 = 30, da machen die 4 Zahlen, 12, 8, 6, 4, 30 aus: mit den Buchstaben a † b † c † d = e. In diesem Fall bedeutet a, 12, b, 8, c, 6, d, 4, und e, 30. Es kann auch a, und b ꝛc. ꝛc. eine ganze Reihe von Zahlen bedeuten, und dann ist c, ꝛc. ꝛc. ihre Summe z. B. a, soll 8642 und b soll 3124 bedeuten, so kommt die Zahl heraus 11766 und daher kann c diese Zahl bedeuten. Wenn man also setzt a = 8642 und b = 3124 also würde a † b = c folgendes bedeuten 8642 † 3124 = 11766.

Zweyte Species.
Subtraction.

6.) Subtrahiren, oder abziehen heißt: die Differenz oder den Unterschied zwischen zwey ungleichen Zahlen oder Größen finden, die mit der kleinern

nern zusammen der größern Zahl oder Größe gleich ist, oder eine kleinere Zahl von einer größern wegnehmen.

Anmerkung. Es müssen 2 Zahlen oder 2 Reihen von Zahlen allemal vorhanden, und die eine muß größer, als die andere seyn, welche von der größern abgezogen wird.: die 3te gefundene Zahl wird der Rest genennt, welcher anzeigt, um wie vielmal die kleinere von der größern Zahl übertroffen wird. Z. B. 16 ÷ 9 = 7. Mit Buchstaben a ÷ b = c. Hier ist a = 16 und b = 9 also ist der Differenz c = 7.

Dritte Species.
Multiplication.

7.) Multipliciren heißt das factum aus 2 factoribus finden, oder auch multipliciren ist: eine Zahl so vielmal vermehren, als die zweyte Zahl Unitäten in sich faßt.

Anmerkung. 1.) Die Zahlen, welche multiplicirt werden, heißen die Factores: die Zahl, welche multiplicirt wird, heißt der Multiplicandus; die Zahl hingegen, womit man multiplicirt, der Multiplicator. Die Zahl, so gefunden wird, das

Pro-

Product oder Factum, z. B. 24 ist das Product oder Factum, das aus 2 Factoren 4 und 6 nach dem Einmal Eins gefunden wird: dieses Factum 24 zeiget an, daß der eine Factor 6 soviel mal genommen, als der andere Factor 4 Unitäten in sich

mal ist

hat. $4 \times 6 = 24$. $24 \times 3 = 72$. Mit Buchstaben $a \times b = c$: oder $a \times b = x$: da hierunter a, 4: und unter b, 6 verstanden wird, so wird unter c, 24: oder nach dem 2ten Exempel, da unter a, 24, und unter b, 3, so muß unter x, 72 verstanden werden: oder auch auf folgende Art, $a \times b = ab$, dann bedeutet ab 72.

2.) Soll eine Zahl mit sich selbst multiplicirt werden, so wird sie so gesetzt $3 \times 3 = 9$, oder $a \times a = aa$; es kann aber auch das Factum unten ein a haben, aber alsdann muß man von oben zur Rechten einen kleinen 2 schreiben, als: $a \times a = a^{(2)}$ statt $a \times a = aa$ und so mit allen übrigen Buchstaben.

3.) Soll eine Zahl 3 oder mehrmal durch sich selbst multiplicirt werden, so setzet man sie auf folgende Art: $2 \times 2 \times 2 = 8$ oder $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$. $a \times a \times a = aaa$ oder kürzer $a \times a \times a = a^{(3)}$

Vierte Species.
Division.

8.) Dividiren heisset: eine dritte Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen, welche anzeigt, wie vielmal eine gegebene in der andern gegebenen Zahl enthalten sey.

Anmerkung. 1.) Die gegebene Zahl, welche die Frage ist, wie vielmal sie die andere in sich faße, heisset der Dividendus, die andere gegebene Zahl, wo man fragt, wie vielmal sie in jener enthalten sey, heißt der Divisor: die dritte aus diesen beeden gegebenen Zahlen gefundene Zahl heisset der Quotient, welcher allemal anzeigt, daß der Divisor in dem Dividendo soviel mal enthalten sey, wie viel Unitäten in dem Quotienten sind: z. B. mit dem Divisor 6 soll in den Dividendum 24 dividirt werden: der Quotient ist 4, und just 4mal ist 6 in 24 enthalten. $6 : 24 = 4$ $a : ab = b$ man kann den Divisor auch unter den Strich setzen z. B. $\frac{ab}{a} = b$.

2.) Man kann drey und mehrere Buchstaben zum Dividendus und Divisor nehmen, davon aber weiter unten.

Einige

Einige Grundsätze.

9.) Jede Zahl und Größe ist ihr selbsten gleich und ähnlich.

Anmerkung. Einen solchen Satz, wie dieser ist, nennet man Grundsatz: dieser ist in der Mathematick einer von den wichtigsten. Weil jedermann ihn von selbsten einsiehet, und als richtig annimmt, so hat ihn die Mathematick als den ersten und vornehmsten Grundsatz angenommen. Er kommt vollkommen mit dem Grundsatz überein: ein jedes Ding ist das, was es ist, z. B. 4 = 4. 2 = 2. a = a daraus folgt nun von selbsten noch folgender.

10.) Eine jede Zahl oder Größe ist in sich selbst vollkommen einmal enthalten.

Anmerkung. Der Nutzen dieser Grundsätze erstreckt sich auf alle Species der Arithmetick z. E. die Zahl 8 ist sich selbst gleich 8 = 8. Da nun 8 die Summe von 6 † 2, die Differenz zwischen 10 -̇ 2 = 8, das Factum aus 2 × 4 = 8, und endlich der Quotient ist, wenn man mit 2 in 16 dividirt, 2 : 16 = 8 so folgt, daß die Summe von 6 † 2, die Differenz zwischen 10 -̇ 2,

das

das Factum aus 2 ⨯ 4 und endlich der Quotient von 2 in 16 dividirt einander vollkommen gleich seyn müssen. Man kann alle 4 Species vermöge des Zeichens der Gleichheit hintereinander setzen, als: 6 † 2 = 10 ÷ 2 = 2 ⨯ 4 = 2 : 16 = 8.

11. Sobald zwey Zahlen oder Größen einer Dritten gleich sind, so folgt, daß sie einander selbst gleich sind.

Erläuterung. 4 † 2, ist die eine Größe, und 8 ÷ 2, ist die andere Größe, also 4 † 2 = 6, und 8 ÷ 2 ist = 6, 6 ist also die dritte gemeinschaftliche Größe also:

4 † 2 = 6
8 ÷ 2 = 6

also 4 † 2 = 8 ÷ 2

Noch ein Exempel mit Zahlen:

6 † 4 = 10 und
8 † 2 = 10

also 6 † 4 = 8 † 2

Exempel mit Buchstaben, $a + b = c$

$d + e = c$

also $a + b = d + e$

oder: $a + b = c$

$d \div e = c$

also $a + b = d \div e$

12.) Gleiche Zahl oder Größe, zu gleicher Zahl oder Größe addirt, giebt gleiche Summe.

Erläuterung.

$8 = 8$

$+ 4 = 4$

also $12 = 12$

oder $4 + 4 = 8$

$2 + 2 = 4$

also $6 + 6 = 12$

Mit Buchstaben $a + a = c$

$b + b = d$

also $ab + ab = cd$

Erläuterung der Exempel:

Die Zahl 4, und wieder 4 ist gleich 8, und 2 und wieder 2 ist gleich 4: wenn man nun 2 + 2 zu 4 + 4 addirt, so kommt eben so viel heraus, nemlich: 12, als wenn man 4 zu 8 addirt: das heißt also, es kommen gleiche Summen heraus.

13.) Addirt man gleiches zu dem Größeren, und gleiches zu dem Kleineren, so muß die Summe im ersten Fall größer als im andern Fall seyn.

Erläuterung. Vorher müssen wir das Zeichen der ungleichen Größe kennen; und dieses ist folgendes $>$ oder $<$, die kleinere Größe wird an die Spitze gesetzt, und die Größere an die Oeffnung z. E. $2 < 3$, oder $3 > 2$, das ist, 2 ist kleiner als 3: nach diesen Vorausgesetzten ist nun das Exempel sehr leicht:

$$\begin{array}{rcl} 12 > 4 & & a > b \\ 8 = 8 + & & c = c + \\ \hline \text{also } 20 > 12 & & \text{also } ac > bc. \end{array}$$

14.) Zerlegt man eine Größe, die aus Zusammensetzung von andern Größen entstanden ist, auf eben die Art, wie sie entstand, so kommt die andere Größe wieder heraus.

Erläuterung durch ein Exempel $14 = 8 + 6$ d. i. die Zahl 14 ist aus 8 und 6 entstanden: nimmt man nun 8 von 14 weg, so bleibt die Zahl 6, nimmt man 6 hinweg, so bleibt die Zahl 8, aus welchen beeden Zahlen 6 und 8, 14 entstanden ist.

15.) Gleiches von Gleichem subtrahirt, bleibt Gleiches übrig.

Erläuterung $8 + 4 = 12$
$\div 3 + 2 = 5$

also $5 + 2 = 7$

Nimmt man 3 von 8 weg, so bleibt 5, und nimmt man 2 von 4 weg, bleibt 2, also $5 + 2 = 7$ diese 7 bleibt auch übrig, wenn man 5 von 12 wegnimmt.

16.) Ziehet man gleiches von dem Größern, und das nemliche gleiche von dem Kleinern ab, so bleibt im ersten Fall mehr übrig, als in dem andern Fall.

Erläuterung $6 + 4 > 8$
$\div 3 + 2 = 5$

also $3 + 2 > 3$

Das heißt, $3 + 2$ macht 5: diese 5 von $6 + 4$ das gleich ist 10, abgezogen, als die größere Zahl, und 5 abgezogen von 8 als der kleinern, muß von 10, im ersten Fall mehr übrig bleiben, nemlich $3 + 2 = 5$ als von 8 im andern Falle, nemlich: 3.

Mit Buchstaben $a + b > c$

$\div d + e = f$

also $a + b \div d + e > c \div f$

Die Größe $a + b$ ist größer angenommen als die Größe c, also bleibt nothwendiger Weise mehr übrig, wenn man die Größe $d + e$ die gleich ist der Größe f, von der größern Größe $a + b$ abzieht, als wenn man die Größe f die gleich ist der Größe $d + e$ von der kleineren Größe c abzieht.

17.) Wenn man Gleiches unter sich mit andern Größen, die auch unter sich einander gleich sind multiplicirt, so kommen gleiche Facta heraus.

Erläuterung.

$4 = 4$ $6 \times 2 = 12$

$\times 2 = 2$ $2 \times 3 = 6$

also $8 = 8$ also $12 \times 6 = 72$

$a \times b = c$

$d \times e = f$

also $ad \times be = cf$

18.) Wenn eine größere und eine kleinere Größe durch unter sich gleiche Größen multiplicirt wer-

werden, so sind die Facta ungleich, und jenes Factum größer, dieses aber kleiner.

Erläuterung

$$12 > 8$$
$$\times\ 4 = 4$$
$$\text{also } 48 > 32$$

oder

$$2 \times 6 > 8$$
$$2 \times 2 = 4$$
$$\text{also } 4 \times 12 > 32$$

Mit Buchstaben

$$a \times b > c$$
$$d \times e = f$$
$$\text{also } ad \times be > c \times f$$

19.) Gleiches durch gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten.

Erläuterung.

$$2 : 8 + 4 = 12$$
$$2 : 4 + 2 = 6$$
$$2 + 1 = 3$$

das heißt, die Zahl 2 ist der Divisor, die andere Zahlen sind der Dividendus: nun mit 2 in 8 dividirt gibt den Quotienten 4, ferner mit 2 in 4 dividirt gibt den Quotienten 2, : mit dem Divisor 2 in 12 dividirt, gibt den Quotienten 6: nun mit dem Divisor 2: wenn man es weiter verfolgen will

in 4 dividirt, gibt den Quotienten 2, fortgefahren in 2 dividirt gibt den Quotienten 1, und endlich in 6 dividirt: giebt den Quotienten 3; also

$2 + 1 = 3.$

20.) Dividirt man das Größere und Kleinere durch gleiches, so ist der Quotient im ersten Fall größer als im andern.

Erläuterung. $\dfrac{2 : 8 + 6 > 12}{4 + 3 > 6}$

Weil also $8 + 6 = 14$ und demnach größer als 12 ist, so muß $4 + 3 = 7$ größer seyn als 6.

Mit Buchstaben:

$$\frac{d : a > b + c}{a > d : b + c}$$

oder mit e dividirt

$$\frac{e : a + b > c}{a + b > e : c}$$

Man sezet den Divisor e: (oder welche Buchstaben man als Divisor annimmt) zur linken Hand, alsdann das Divisionszeichen, darauf die größere Größe a + b hernach das Zeichen der Ungleichheit

>

b. und dann die kleinere Größe c: unter den Strich kömmt wieder die größere Größe, hernach das Zeichen der Ungleichheit, dann der Divisor und endlich die kleinere Zahl wieder

21.) Das Ganze ist seinen Unitäten, diese nemlich zusammengenommen, vollkommen gleich.

Erläuterung.

Z. E. 1 fl. ist 60 kr. gleich und 60 kr. zusammengenommen machen 1 fl. Mit Buchstaben $a + b + c + d + e + f + g + h + i = x$: das x das Ganze ist allen übrigen Buchstaben gleich: oder deutlicher, die Bedeutung des x ist den Bedeutungen aller Buchstaben zusammengenommen gleich, denn die übrigen Buchstaben sind die Theile, die zusammengenommen das ganze x ausmachen.

22.) Das Ganze übertrift eine jede einzelne Unität.

Erläuterung.

Z. E. 1 fl. ist größer als 1 kr. von 60 kr. die zusammengenommen erst 1 fl. ausmachen. Mit Buchstaben x ist größer als h von allen den Buchstaben nach dem Exempel beym vorigen §.

23.) Werden Größen, die durch Theilung aus einer andern Größe entstanden sind, wieder zusammengesetzt, so kömmt die nemliche Größe wieder heraus, aus welcher jene Größen entstanden sind.

Erläuterung.

Die Größen 12, 8, 6 sind durch subtrahiren aus 26 entstanden, nemlich:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 8 \div \\ \hline 18 \\ 6 \div \\ \hline 12 \end{array}$$

addirt man diese 3 Zahlen 12, 8, und 6 so kommt die Größe 26 wieder heraus.

24.) Werden zwey Größen auf einerley Art getheilt, so sind sie einander gleich.

Erläuterung.

Die Linien a b c d

sind in 4 gleiche Theile getheilt, also ist die Linie ab = cd, und die Linie cd = ab.

25.) Multiplicirt man 2 bejahende Größen, so ist das Factum bejahend.

Erläuterung.

4 × 6 = 24 Da wird die eine bejahende Größe so vielmal gesetzt, als die andere Unitäten in sich hat: 6, 4 mal gesetzt, oder bejahet, gibt das bejahende Factum 24.

26.) Eine bejahende Größe mit einer verneinenden multiplicirt, gibt ein verneinendes Factum.

Erläuterung.

Die bejahende Größe muß so vielmal verneint werden, als die negative Größe Unitäten in sich hat, z. E. 6 fl. habe ich 4 mal nicht; also habe ich 24 fl. Mangel: das Factum 24 ist also negativ.

27.) Werden 2 verneinende Größen mit einander multiplicirt werden, so ist das Factum allezeit bejahend.

Erläuterung.

6 fl. Schuld habe ich 3mal nicht; also habe ich 18 fl. mehr, als einer der 6 fl. Schuld hat, und 3 mal bezahlen muß, beyde Größen 6, und 3 sind negative Größen, also ist das Factum bejahend.

28.) Dividirt man eine bejahende Größe mit einer bejahenden so ist der Quotient bejahend.

Erläuterung.

3 : 24 gibt die bejahende Größe 8: d. i. 24 fl. sollen sich z. E. 3 Personen theilen; es bekömmt also jegliche Person wirklich 8 fl.

29.) Werden negative Größen mit negativen dividirt, so ist der Quotient ebenfalls affirmativ.

Erläuterung.

Hätte ich 24 fl. Schuld an 3 Personen, und diese verlangten ihre Schuld nicht, so geniesse ich von jeder Person 8 fl. 3 : 24 | 8 also ist der Quotient affirmativ.

30.) Wenn eine kleinere negative Größe von einer größern negativen Größe subtrahirt wird, so ist der Rest allemal negativ.

Erläuterung.

Von 50 fl. Schuld sollen 30 fl. Schuld subtrahiret werden ÷ 50 fl. Schuld ist die größere negative Größe und 30 fl. Schuld ist die kleinere negative Größe — bleibt also Rest, als negativ, 20 fl. Schuld ÷ 50 fl.

÷ 30 fl.

Rest 20 fl.

29.)

31.) Wird eine größere affirmative Größe von einer kleinern affirmativen Größen subtrahirt, so ist der Rest negativ.

Erläuterung.

80 fl. Soll ich bezahlen, und ich habe nur 60 fl. so bleibe ich noch 20 fl. Schuld, und diese 20 fl. sind der negative Rest + 80 fl.

÷ 60 fl.

Rest 20 fl.

32.) Soll von einer größern affirmativen Größe, eine kleinere negative Größe subtrahirt werden, so ist der Rest so groß, als die affirmative Größe selbst.

Erläuterung.

Habe ich 20 fl. Geld und bin davon 12 fl. schuldig, wird mir aber die Schuld 12 fl. erlassen, so behalte ich meine 20 fl. + 20 fl.

÷ 12 fl.

Rest ÷ 20 fl.

33.) Wird von einer größern affirmativen Größe eine kleinere affirmativen Größe subtrahirt, so ist der Rest allezeit affirmativ.

Erläu-

Erläuterung.

Wenn von der größern affirmativen Größe 12 die kleinere affirmative Größe 6 subtrahirt wird, so ist der Rest 6, welcher also auch affirmativ ist.

$$+\ 12$$
$$+\ 6\ \div$$

Rest 6

34.) Bey gleichen Größen findet sich kein Differenz.

Erläuterung.

$4 + 2 = 8 \div 2 = 6.$ $6 + 4 = 10 \div 4 = 6.$

35.) Wird eine affirmative und negative Größe, die einander gleich sind, zusammen addirt, so heben sie sich einander auf.

Erläuterung.

Zu 4 fl. die ich besitze, als affirmative Größe 4 fl. Schuld, als negative Größe addirt, so heben sie sich auf.

$$\left.\begin{array}{r} +\ 4 \\ \div\ 4 \end{array}\right\}\ \text{addirt.}$$

Rest 0

36.) Werden ungleiche affirmative und negative Größen zusammen addirt, so hebt die kleinere Größe einen Theil der größern Größe auf, der ihr gleich ist, das übrige ist die Summe, die das Zeichen der größern Größe behält.

Erläuterung.

Zu + 8 soll addirt werden ÷ 6 so bleibt + 2: denn 6 von 8 läßt noch 2 übrig.

37.) Jede Zahl hat ihre Bedeutung, und um diese genau zu kennen, theilet man eine zusammengesetzte Zahl in Glieder: das erste Glied von der Rechten zur Linken zeiget an, wie viel Einheiten; das zweyte, wie viel Zehner; das dritte wie viel Hunderte; das vierte, wie viel Tausende, das fünfte, wie viel Zehentausende u. s. w. in einer Größe anzutreffen seyn.

Erläuterung.

Alle einzelne Zahlen von 1 — 9 bedeuten die Einer: es bedeutet 1, eine Unität; 2, zwey Unitäten; 3, drey Unitäten; 4, vier Unitäten, — 9, neun Unitäten. Das übrige ist im § begriffen. Folgende Zahl 64325, wird dennach, da

5, die Unitäten, 2, die Zehner, 3, die Hunderte, 4, die Tausende und 6, die Zehntausende bedeutet also ausgesprochen, vier und sechzigtausend drey hundert und fünf und zwanzig.

Numeration.

38.) Numeriren heißt: eine Zahl oder eine Reihe Zahlen recht schreiben und auch recht aussprechen.

Erläuterung.

a.) Man theile die gegebene Zahl in Klassen von der rechten Hand gegen die linke Hand durch Strichchen; zu jeder Klasse nehme man 3 Zahlen; am Ende der linken Hand zu, kann sie auch weniger haben.

b.) Ueber die Zahl, welche nach dem andern Strichchen folgt, mache man einen Punkt, und über die, welche nach dem vierten folgt zwey Punkte u. s. f.

c.) Die 4te Zahl von der Rechten nach der Linken spreche man durch Tausende, die 7te Zahl durch Million, die 13 Zahl durch Billion aus und so weiter.

d.) 1000 mal 1000 ist eine Million; 1000 mal 1000 Millionen, eine Billion,

1000 mal 1000 Billionen, eine Trillion, 1000 mal 1000 Trillionen, eine Quatrillion und so weiter.

Exempel.

2''',125,473'',613,578',432,597.

Zwey Trillionen, hundert fünf und zwanzig tausend, vierhundert drey und siebenzig Billionen, sechs hundert dreyzehen tausend, fünf hundert acht und siebenzig Millionen, vier hundert zwey und dreyßig tausend, fünf hundert sieben und neunzig.

83''',403,578'',573,084',670,243.

Drey und achtzig Trillionen, vier hundert und drey tausend, fünf hundert acht und siebenzig Billionen, fünf hundert drey und siebenzig tausend, vier und achtzig Millionen, sechs hundert siebenzig tausend, zwey hundert drey und vierzig.

4''',567,890'',134,459',763,789.

Vier Trillionen, fünf hundert sieben und sechzig tausend, acht hundert neunzig Billionen, hundert vier und dreyßig tausend, vier hundert neun und fünfzig Millionen; sieben hundert drey und sechzig tausend, sieben hundert neun und achtzig.

Addition.

39.) Wie addirt man verschiedene Zahlen zusammen? (siehe von der Addition vorne §. 5.)

Erläuterung.

a.) Man setzet die gegebenen Zahlen so unter einander, daß die Einer unter den Einern, die Zehner unter die Zehner, die Hunderte unter die Hunderte u. s. w. zu stehen kommen.

b.) Alsdann, wann die gegebene Zahlen geschrieben sind, wird ein Strich gezogen, und

c.) Fängt man von der rechten Seite, nemlich den Einern an zusammen zu zehlen; enthält aber diese herausgebrachte Zahl Unitäten und Zehner in sich, z. E. 15, so wird nur die Unitäts, Zahl unter den Strich gesetzt, und die Zehner Zahl zu den folgenden Zehnern mit gerechnet.

Exempel.

3578
524
63
4165

Erläu=

Erläuterung dieses Exempels.

In diesem Exempel machten die Unitätszahlen 8, 4, 3, = 15 aus: nun wird nur die Zahl 5, als 5 Unitäten, die über 10 sind, unter den Strich heruntergesetzt. Alsdann rechnet man eins von den 15, das man im Sinne hat, zu der folgenden Reihe, aber diese Zahl 1 ist keine Unitätszahl, oder deutlicher ist keine Einheit, sondern es sind vielmehr 10 Unitäten, d. i. ein Zehner in der Zahl 1 enthalten. Diesen Zehner, (Dekas) nimmt man zu den übrigen Zehnern, die in der nächst folgenden Reihe linker Hand stehen.

Anmerkung. Sollte aber die Reihe der Unitäten so groß seyn, daß die Summe davon, in 20, 30, 40, 50, 60, hineinkäme, so nimmt man zwar, 2, 3, 4, 5, 6, zu der Summe der folgenden Reihe der Zehner, aber sie sind, wie oben erwähnt, keine Unitäten mehr, sondern lauter Zehner (Dekades).

Hat man die Unitätszahlen zusammen gezählt, so eilet man zu den Zehnern (den Dekaden): beläuft sich bey ihrer Zusammenzählung die Summe über 100, oder über 10 Dekades, so setzet man das übrige, die übrige Dekades unter die Reihe

der Zehner: siehe das Exempel wo die 6, 2 und 7. Zehner zusammen 15 Zehner ausmachen, und den 1 Zehner von den 15 Einern dazu genommen, gibt 16 Zehner: in diesen 16, stecken schon 100, die 6 Dekaden setzet man also unter die Reihe der Zehner, und die 100, oder der eine numerus centenarius wird zu den 2mal 5 numeros centenarios zu den Hunderten addirt; diese geben alsdann 11 numeros centenarios oder Hunderte. 10 numeri centenarii, Hunderte, machen aber schon einen numerum millenarium, Tausende aus, also wird nur der eine numerus centenarius, die eine Zahl Hunderte, die über 10 Hunderte ist, unter die Reihe der Hunderte heruntergesetzt. Endlich addirt man die Zahlen Tausende und die Zahl Tausende, die von der Zahl der Hunderte dazu kam, zusammen, so kommt nach unserm Exempel die Zahl 4 Tausende heraus, und die Addition ist alsdann auf solche Art geschehen.

Anmerkung. Es ist wohl zu merken, daß das, was man von den Einern zu den Zehnern rechnen muß, nicht mehr Einer, sondern Zehner, und das, was man von den Zehnern zu den Hun-

der-

derten rechnet, nicht mehr Zehner, sondern Hunderte, und endlich das, was man von den Hunderten zu den Tausenden rechnen muß, nicht mehr Hunderte, sondern Tausende u. s. w. sind.

Mit Buchstaben.

Wenn 13578 durch a, 524 durch b, und 63 durch c und durch x die Summe ausgedrückt würde, so würde man auf folgende Weise verfahren:

$$a + b + c = x.$$

Ein anderes Exempel:

$$a + b + c + d + e + f + g = x.$$

Beweis der richtigen Addition.

a) Alle Theile sind dem Ganzen gleich.

Nun sind alle Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Theile ihres Ganzen.

Also sind alle Einer, Zehner, Hunderte, Tausende ihrem Ganzen gleich.

b) Das Ganze wird in der Addition die Summe genennt, (siehe §. 5.) sind nun die Einer u. s. w. ihrem Ganzen gleich, so sind sie ihrer Summe auch gleich.

Nun sind alle Einer u. s. w. ihrem Ganzen gleich (n a)

 Also

Also sind alle Einer u. s. w. ihrer Summe gleich.

c) Addiren heißt: verschiedene Zahlen nach ihren Unitäten, (Theilen) in eine Summe bringen, die jenen gleich ist. (§. 5.)

Nun sind alle Einer u. s. w. zusammengenommen der Summe gleich, (n b.)

Wenn man also die Summe aller dieser Einer u. s. w. welche zusammengenommen, die Summe ausmachen, gefunden hat, so hat man addirt.

Nun haben wir die Summe aller dieser Einer u. s. w. gefunden.

Also haben wir alle die Einer, Zehner, Hunderte, Tausende zusammen addirt.

d) Wenn eine Größe, die durch Zusammensetzung anderer Größen entstanden ist, eben so, wie sie zusammengesetzt wurde, wieder zerlegt wird, so kommen eben dieselben Größen wieder heraus. (§. 14.)

Nun ist die Summe 4165 durch Zusammensetzung aller Einer, Zehner, Hunderte, Tausende entstanden.

Also

Also, wenn man auf die nemliche Art alle diese Einer, Zehner, u. s. w. wieder von der Summe wegnimmt, so bekommt man alle einzelne Einer, Zehner, Hunderte und Tausende: z. E.

```
 4165
   63 ÷
 ----
 4102
5.2.4 ÷
 ----
 3578
```

Noch mehrere Additions-Exempel.

```
a)  35678        zerfällt 113082
     4321                      .4 ÷
     2345                 -------
    67809                 113078
     2145                     .93 ÷
      687                 -------
       93                 112985
        4 +                 6.8.7 ÷
   ------                 -------
   113082                 112298
                             2145 ÷
                          -------
                          110153
                          6.7.80.9 ÷
                          -------
                           42344
                          2.3.4.5 ÷
                          -------
                           39999
                             4321 ÷
                          -------
                     Rest  35678
```

b)	1	2	3	4	5	6	
		7	8	9	1	2	
			3	4	5	6	
				7	8	9	
					1	2	
						3	+
	2	0	6	6	2	8	

zerfällt	2	0	6	6	2	8	
						3	÷
	2	0	6	6	2	5	
					1	2	÷
	2	0	6	6	1	3	
				7.	8.	9	÷
	2	0	5	8	2	4	
			3	4.	5.	6	÷
	2	0	2	3	6	8	
		7.	8.	9	1	2	÷
Rest	1	2	3	4	5	6	

oder man addire auf folgende Art:

```
c) 7 6 5 4 3 2 1
     6 1 2 4 3 5
       5 4 3 2 1
         2 3 4 5
           6 7 8
             9 1
               2  +
   -------------
             2 3
           2 7
         1 9
       1 2
     1 1
   1 2
   7
   -------------
   8 3 2 4 1 9 3
```

```
zerfällt  8 3 2 4 1 9 3
                      2  ÷
          -------------
          8 3 2 4 1 9 1
                    9 1  ÷
          -------------
          8 3 2 4 1 0 0
                .6.7.8   ÷
          -------------
          8 3 2 3 4 2 2
              2.3.4.5    ÷
          -------------
          8 3 2 1 0 7 7
            5.4.3 2 1    ÷
          -------------
          8 2 6 6 7 5 6
          .6 1 2 4 3 5   ÷
          -------------
          7 6 5 4 3 2 1
```

d) 54322	zerfällt	56119
1234		7 ÷
567		56112
89		.8.9 ÷
7 +		56023
29		.5.6.7 ÷
19		55456
10		1234 ÷
5		54322
5		
56119		

Subtraction.

40.) Wie verfährt man beym Subtrahiren, da man eine kleinere Zahl von einer größern wegnimmt? (§. 6.)

Erläuterung.

a) Man schreibet die kleinere unter die größere Zahl, oder neben die größere Zahl, nur muß das Subtractionszeichen zwischen der größern und kleinern Zahl stehen, (wie §. 6.)

b) Unter die Zahlen wird eine Linie gezogen, oder stehen die Zahlen neben einander, so folgt das Zeichen der Gleichheit, (wie §. 6.)

c) Die Einer werden von den Einern, die Zehner von den Zehnern, die Hunderte von den Hun-

Hunderten, die Tausende von den Tausenden u. s. w. abgezogen und weggenommen.

Exempel.

a) 12 ÷ 5 = 7 b) 320 ÷ 110 = 210.

c) 4528 ÷ 2312 = 2216

d) 224 ÷ 112 = 112.

oder auf folgende Art:

aa) 4567	bb) 26789	cc) 689145
·254 ÷	13426 ÷	276123 ÷
R. 4313	R. 13363	R. 413022

Erläuterung der Exempel.

a) 12, weniger 5, ist gleich 7.

aa) Beym Subtrahiren fängt man wie beym addiren von der Rechten zur Linken an: also sagt man, 4 von 7 bleibt 3, 5 von 6, bleibt 1, 2 von 5 bleibt 3, nichts von 4 bleibt 4; dann bleibt also 4313 Rest, und so verfährt man bey allen Exempeln.

Anmerkung. a) Soll eine größere Zahl von einer kleinern weggenommen werden, so borget man von der nächstfolgenden Zahl Eins, und bemerkt solches mit einem Punkt; dieß geborgte Eins ist aber keineswegs eine bloße Unität,

sondern es ist ein Zehner, weiter fort eine hunderte Zahl u. s. w. die nächstfolgende Zahl verliert alsdann einen Zehner u. s. w.

Exempel.

a)
```
  6.7.3.4
  4 8 4 5 ÷
  -------
  1 8 8 9
```

b)
```
  9.2.8.7
  7 4 9 8 ÷
  -------
  1 7 8 9
```

c)
```
  8.9.7.6
  6 9 8 7 ÷
  -------
  1 9 8 9
```

Erläuterung

Des Exempels a) 5 Einer soll ich von 4 Einer wegnehmen, das kann ich nun nicht, nun muß ich also meine Zuflucht zu der nächstfolgenden Zahl nehmen, nämlich zu 3, als Zehner, muß Eins wegborgen, aber dieß Eins ist nach obiger Anmerkung kein bloßer Einer, sondern ein Zehner oder 10 Einer, zu den 10 Einer die 4 Einer addirt, gibt 14 Einer: nun kann ich von 14 Einer gar wohl 5 Einer wegnehmen, und blei-

bleiben noch 9 Einer übrig. Die folgende Zahl 3 bedeutet nun nicht mehr 3 Zehner, sondern, weil 1 Zehner weggeborgt ist, nur noch 2 Zehner, davon sollen nun 4 Zehner abgezogen werden, welches nicht geschehen kann, demnach muß wieder von der Hunderten Zahl 7, Eins geborgt werden: dieß Eins ist aber 100 oder 10 Dekades, nun diese 10 Dekades zu den 2 addirt, gibt 12 Dekades, 4 davon weggenommen, bleiben also noch 8 Zehner übrig. Die Zahl 7 bedeutet nun nicht mehr 700, sondern nur noch, weil 100 weggeborgt wurden, 600, von diesen sollen nun 800 abgezogen werden, welches unmöglich ist, also muß von den nächst 6 Tausenden 1000 geborgt werden, diese zu den 600 addirt, geben 1600, nun 800 davon abgezogen, bleiben also noch 800. Jetzt aber bedeutet die Zahl 6 nicht mehr 6000, sondern nur noch 5000, weil 1000 weggeborgt ward, von diesen 5000 aber 4000 abgezogen, bleibt 1000 Rest. Und so hat man den ganzen Rest, von der oben stehenden größern Zahl. Auf solche Art verfährt man bey allen Exempeln.

Anmerkung. b) Stehen in der folgenden Stelle von der man borgen soll, Nullen, so gehet

man

man so weit fort zur Linken, bis man eine Zahl antrift, von der man wegborgen kann, dann siehet man die dazwischen liegenden Nullen so an, als wären sie alle in Nummern verwandelt.

Exempel.

a)	b)	c)
8.0 0	7.0 0 0	9.0 0 0
5 7 2 ÷	5 6 2 8 ÷	6 4 5 9 ÷
R. 2 2 8	1 3 7 2	2 5 4 1

Erläuterung.

Des Exempels a) von 800 sollen 572 abgezogen werden, man spricht demnach, 2 von Null kann ich nicht, so borg ich mir Eins von 8. (dieses Eins ist aber ein numerus centenarius) diesem num. centen. der 10 Dekades hat, setzet man über die den 8 zunächst stehenden Null', und von diesen 100 borgt man wieder eine Dekas, (das sind 10 Unitäten,) die man über die Null zur Rechten setzet, von diesen 10 Unitäten ziehet man 2 Unitäten ab, so bleibet also noch 8 übrig. Da nun von 100 eine Dekas oder 10 Unitäten weggeborgt worden sind, so bleiben nur noch 9 Dekades, von diesen 7 Dekades abgezogen, bleiben noch 2 Dekades. Von 800, sind 100 eben-

falls

falls weggeborgt, also sind es nur noch 700, von diesen 700 die 500 abgezogen, bleiben alsdann noch 200 übrig. Auf solche Art verfährt man bey allen solchen Exempeln.

$$\begin{array}{r} 100.\,10 \\ 8.0\,0 \\ 5\,7\,2 \div \\ \hline 2\,2\,8 \end{array}$$

Mit Buchstaben.

Wenn z. E. a = 432 und b = 212, so wäre der Rest c 220, welches auf solche Art geschrieben wird:

$$a \div b = c.$$

Beweis der richtigen Subtraction.

a) Alle Theile sind dem Ganzen gleich.

Nun sind alle Einer, Zehner u. s. w. die übrig geblieben sind, Theile des ganzen Restes.

Also sind alle Einer, Zehner u. s. w. dem ganzen Rest gleich.

b) Den Rest finden heißt subtrahiren (§. 6.)

Nun sind alle übrig gebliebenen Einer, Zehner u. s. f. dem Rest gleich (n a) hat man den

Rest

Rest der Differenz gefunden, so hat man subtrahirt.

Nun haben wir den Rest gefunden,
Also auch subtrahirt.

c) Werden Größen, die durch Theilung anderer Größen entstanden sind, auf die nämliche Art wieder zusammen gesetzt, so kömmt die erste Größe wieder heraus. Nun ist der Rest durch Wegnehmung der kleinern gegebenen Zahl von der größern Zahl entstanden. Also wenn man den Rest zu der kleinern gegebenen Zahl wieder hinzusetzt, so entsteht die erste Größe daraus.

Exempel.

n b)	26789	
	13426	÷
Rest	13363	+
obige Summe	26789	

n c)	689145	
	276123	÷
R.	413022	+
	689145	

Exem=

Exempel
von denen, wo man borgen mußte.

n a) 6.7.3.4
4845 ÷
1889 +
obige Summe 6734

n c) 8.9.7.6
6987 ÷
1989 +
8976

n c) Anmerk. b)
9.000
6459 ÷
2541 +
9000

Multiplikation.

41) Was multipliziren heißt siehe (§. 7.)

Das kleine Ein mal Eins.

1	mal	1	ist	1
2	—	2	—	4
2	—	3	—	6
2	—	4	—	8
2	—	5	—	10
2	—	6	—	12
2	—	7	—	14
2	—	8	—	16
2	—	9	—	18
2	—	10	—	20

3	mal	3	ist	9
3	—	4	—	12
3	—	5	—	15
3	—	6	—	18
3	—	7	—	21
3	—	8	—	24
3	—	9	—	27
3	—	10	—	30

4	mal	4	ist	16
4	—	5	—	20
4	—	6	—	24
4	—	7	—	28
4	—	8	—	32
4	—	9	—	36
4	—	10	—	40

5	mal	5	ist	25
5	—	6	—	30
5	—	7	—	35
5	—	8	—	40
5	—	9	—	45
5	—	10	—	50

6	mal	6	ist	36
6	—	7	—	42
6	—	8	—	48
6	—	9	—	54
6	—	10	—	60

7	mal	7	ist	49
7	—	8	—	56
7	—	9	—	63
7	—	10	—	70

8	mal	8	ist	64
8	—	9	—	72
8	—	10	—	80

9	mal	9	ist	81
9	—	10	—	90

10	mal	10	ist	100
10	—	100	—	1000
10	—	1000	—	10000

Das große Ein mal Eins.

1	mal	11	ist	11
2	—	11	—	22
3	—	11	—	33
4	—	11	—	44
5	—	11	—	55
6	—	11	—	66
7	—	11	—	77
8	—	11	—	88
9	—	11	—	99
10	—	11	—	110

1	mal	12	ist	12
2	—	12	—	24
3	—	12	—	36
4	—	12	—	48
5	—	12	—	60
6	—	12	—	72
7	—	12	—	84
8	—	12	—	96
9	—	12	—	108
10	—	12	—	120

1	mal	13	ist	13
2	—	13	—	26
3	—	13	—	39
4	—	13	—	52
5	—	13	—	65
6	—	13	—	78
7	—	13	—	91
8	—	13	—	104
9	—	13	—	117
10	—	13	—	130

1	mal	14	ist	14
2	—	14	—	28
3	—	14	—	42
4	—	14	—	56
5	—	14	—	70
6	—	14	—	84
7	—	14	—	98
8	—	14	—	112
9	—	14	—	126
10	—	14	—	140

1	mal	15	ist	15
2	—	15	—	30
3	—	15	—	45
4	—	15	—	60
5	—	15	—	75
6	—	15	—	90
7	—	15	—	105
8	—	15	—	120
9	—	15	—	135
10	—	15	—	150

1	mal	16	ist	16
2	—	16	—	32
3	—	16	—	48
4	—	16	—	64
5	—	16	—	80
6	—	16	—	96
7	—	16	—	112
8	—	16	—	128
9	—	16	—	144
10	—	16	—	160

1	mal	17	ist	17
2	—	17	—	34
3	—	17	—	51
4	—	17	—	68
5	—	17	—	85
6	—	17	—	102
7	—	17	—	119
8	—	17	—	136
9	—	17	—	153
10	—	17	—	170

1	mal	18	ist	18
2	—	18	—	36
3	—	18	—	54
4	—	18	—	72
5	—	18	—	90
6	—	18	—	108
7	—	18	—	126
8	—	18	—	144
9	—	18	—	162
10	—	18	—	180

1	mal	19	ist	19
2	—	19	—	38
3	—	19	—	57
4	—	19	—	76
5	—	19	—	95
6	—	19	—	114
7	—	19	—	133
8	—	19	—	152
9	—	19	—	171
10	—	19	—	190

1	mal	20	ist	20
2	—	20	—	40
3	—	20	—	60
4	—	20	—	80
5	—	20	—	100
6	mal	20	ist	120
7	—	20	—	140
8	—	20	—	160
9	—	20	—	180
10	—	20	—	200

1	mal	21	ist	21
2	—	21	—	42
3	—	21	—	63
4	—	21	—	84
5	—	21	—	105
6	—	21	—	126
7	—	21	—	147
8	—	21	—	168
9	—	21	—	189
10	—	21	—	210

1	mal	22	ist	22
2	—	22	—	44
3	—	22	—	66
4	—	22	—	88
5	—	22	—	110
6	—	22	—	132
7	—	22	—	154
8	—	22	—	168
9	—	22	—	198
10	—	22	—	220

1	mal	23	ist	23
2	—	23	—	46
3	—	23	—	69
4	—	23	—	92
5	—	23	—	115
6	—	23	—	138
7	—	23	—	161
8	—	23	—	184
9	—	23	—	207
10	—	23	—	230

1 mal	24	ist	24		1 mal	25	ist	25
2 —	24	—	48		2 —	25	—	50
3 —	24	—	72		3 —	25	—	75
4 —	24	—	96		4 —	25	—	100
5 —	24	—	120		5 —	25	—	125
6 —	24	—	144		6 —	25	—	150
7 —	24	—	168		7 —	25	—	175
8 —	24	—	192		8 —	25	—	200
9 —	24	—	216		9 —	25	—	225
10 —	24	—	240		10 —	25	—	250

42) Wie verfährt man beym multipliziren?

Erläuterung.

a) Wenn der Multiplikator nur eine Zahl ist, so multiplizirt man mit ihm den ganzen Multiplikandus durch auf folgende Art:

Exempel.

```
α) 45678 ×  A
       3    B
   -----
      24    C
     21     D
    18      E
   15       F
  12        G
  ------
P. 137034 H  C+D+E+F+G=H=AB
```

β)	3456789 ×	A
	4	B
	36	C
	32	D
	28	E
	24	F
	20	G
	16	H
	12	I
P.	13827156	K

C + D + E + F + G + H + I = K = AB.

b) Hat aber der Multiplikator mehr, als eine Ziffer, so ist die Verfahrungsart folgendermaßen:

α) Die Einer des Multiplikators werden unter die Einer des Multiplikandi, die Zehner unter die Zehner u. s. w. gesetzt

β) Mit den Einern multiplizirt man die Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. des Multiplikandi durch.

γ) Die über 9 sich belaufende Einer, Zehner u. s. w. werden zu den folgenden Zehnern, Hunderten, u. s. w. addirt.

δ) Hat man mit den Einern die ganze oben stehende Reihe Zahlen durch multiplizirt, so ver-

verfährt man mit den Zehnern auf die nämliche Art.

Exempel.

aa) 2345678 ×
24

9382712
4691356

P. 56296272

bb) 3456789 ×
35

17283945
10370367

P. 120987615

cc) 23456 ×
42

46912
93824

P. 985152

Erläuterung des Exempels cc)

a) Mit den zwey Einern des Multiplikators muß man die 6 Einer des Multiplikandi multipliziren, gibt also 12 Unitäten, das sind 1 Dekas und 2 Einer: man setzet daher die 2 Einer unter den Strich in die Stelle der Einer, her-

nach muß man mit den 2 Einern des Multiplikators die 5 Zehner des Multiplikandi multipliziren, und den vorigen Zehner dazu addiren, giebt also 11 Zehner: 10 Dekades machen schon einen num. centen. aus, daher bleibt mir 1 Dekas übrig, welche unter den Strich kömmt. Mit den nämlichen 2 Einern multiplizirt man nun die 4 num. centen. giebt 8 num. centen. die vorige übrig gebliebene Hunderte dazu addirt, giebt 9 num. centen., welche ganz unter den Strich kommen: ferner werden mit den 2 Einern die oben stehende 3 num. millen. multiplizirt, geben 6 num. millen., die ebenfalls heruntergesetzt werden. Endlich werden mit den 2 Einern die 2 num. decamillen. multiplizirt, diese geben dann 4 num. deca millen., welche man auch herunterträgt.

b) Desgleichen werden auch alle Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. des Multiplikandi mit den 4 Zehnern des Multiplikators multiplizirt, und zwar verfährt man dabey eben so, wie bey a), welches also keine fernere Auseinandersetzung bedarf.

Beweis der richtigen Multiplikation.

a) Multipliziren heißt das Factum aus 2 Factoribus finden (§. 7.)

Nun haben wir das Factum (Produkt) aus 2 Factoribus gefunden.

Also haben wir die zwey Reihen Zahlen zusammen multiplizirt.

b) Wenn eine Größe, die durch Vermehrung anderer Größen entstanden ist, auf die nämliche Art wieder zerlegt wird, so kömmt die vorige Größe wieder heraus. (§. 14.)

Nun ist jedes Produkt durch die Vermehrung mit 2 Factoribus entstanden, wenn man nun mit dem einen Factor, welcher der Multiplikator war, in das Produkt dividirt, so muß der andere Factor als Quotient, der vorher der Multiplikandus war, wieder herauskommen, dieses geschiehet nun wirklich.

Also hat man richtig multiplizirt.

Exempel.

n. cc) 42 : 9 8 5 1 5 2 | 23456 Quotient, dieser ist der Multiplikandus v. dem Exempel n. cc)

```
n. cc) 42 : 9 8 5 1 5 2 | 23456
          ÷ 8 4
          ------------
       42 : 1 4 5
          ÷ 1 2 6
          ------------
       42 :   1 9 1
          ÷   1 6 8
          ------------
       42 :     2 3 5
          ÷     2 1 0
          ------------
       42 :       2 5 2
          ÷       2 5 2
          ------------
                  0 0 0
```

43) Hat der Multiplikator einige Nullen bey sich, so hängt man sie blos an das Produkt, und schreibet sie im Multiplikator weiter hinaus.

Exempel.

```
a)    5672
    × 3200 *
   ---------
     11344
    17016
   ---------
P. 18150400
```

```
b)    24368
    × 43000 *
   -----------
      73104
     97472
   -----------
P. 1047824000
```

c)

c) 3694
×24000 *

14776
7388

P. 88656000

44) Hat der Multiplikandus Nullen, so gilt eben das, wie (§. 43.)

Exempel.

a) 893200
×22

17864
17864

P. 19650400

b) 2345670000
×56

1407402
1172835

P. 131357520000

45) Haben beyde Factoren am Ende Nullen, so ist ebenfalls die Regel (§. 43.) anwendbar.

Exem-

Exempel.

a) 2468000
 ×24 00

 9872
 4936

P. 5923200000

b) 3579000
 ×34 000

 14316
 10737

P. 121686000000

46) Hat der Multiplikandus in der Mitte Nullen, so müssen alle ausgeschrieben werden.

Exempel.

 30002005
 46 ×

 180012030
 120008020

P. 1380092230

47) Hat der Multiplikator in der Mitte Nullen, so werden sie im multipliziren übergangen, und mit der nächsten Zahl z. E. Hunderte weiter fort multiplizirt.

Exempel.

a) 235794
× 202

471588
471588

P. 47630388

b) 543243
× 3004

2172972
1629729

P. 1631901972

48) Wie multiplizirt man mit Buchstaben? (§. 7. 1, 2, 3.)

Erläuterung.

a) Wenn ein Buchstab durch sich selbst soll multiplizirt werden, so geschiehet es auf folgende Art:

$$a \times a \times a \times a = aaaa$$

$$\text{oder kürzer } a \times \overset{4}{a} = \overset{4}{a}$$

b) Wenn aber verschiedene Buchstaben durch sich selbst multiplizirt werden, so müssen dieselbe durch das Zeichen plus (+) vorher unterschieden werden.

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \times \\
\hline
ab + bb \\
aa + ab \\
\hline
P.\ aa + \overset{2}{ab} + bb
\end{array}
$$

oder also

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \times \\
\hline
ab + \overset{2}{b} \\
\overset{2}{a} + ab \\
P.\ \overset{2}{a} + \overset{2}{ab} + \overset{2}{b}
\end{array}
$$

Division.

49) Zwo Zahlen mit einander zu dividiren (§. 8.)

Erläuterung.

a) Wenn der Divisor bloß aus einem Einer bestehet, das ist, wenn er bloß eine einfache Zahl z. E. von 2 — 9 enthält.

Weitere Auseinandersetzung.

Es sey z. E. mit folgender Zahl 4 als dem Divisor in die Zahl als den Dividendum 8544 zu dividiren.

α) Die erste Ziffer von der Linken zur Rechten, 8 bedeutet nicht 8 Unitäten, sondern vielmehr 8000 Unitäten, oder 8 num. millen., also mit dem Divisor 4 in 8000 dividirt, gibt den Quotienten 2000, das ist 4 ist in 8000, 2000mal enthalten, welches die 2, als der Quotient anzeigt; den Divisor 4 multiplizirt man mit dem Quotienten 2000, gibt also wiederum 8000, diese nun von dem Dividendo abgezogen, bleibt nichts übrig.

β) Nun rücket man zu der folgenden Zahl des Dividendi, diese ist in unserm Exempel 5. Diese 5 bedeutet ebenfalls nicht blos 5 Unitäten, sondern 500 Unitäten oder 5 num. centen. in diese 500 mit 4 dividirt, so ist der Divisor 4 in 500, 100mal enthalten, diese Zahl 1 setzet man neben den vorigen Quotienten 2: 400 von 500 bleiben nun 100 übrig.

γ) Ferner rücket man zu der dritten Zahl des Dividendi, welche 4 Dekaden ist, die 1 von den 500 übrigen dazu addirt, giebt 140 Unitäten, wird nun mit dem Divisor ebenfalls dividirt, so erhält man den Quotienten 3, dieser Quotient 3 kömmt neben die vorigen Quotienten

21 zu stehen, multiplizirt man den Quotienten 3, mit dem Divisor 4, so erfährt man, daß 4 in 14 3mal enthalten ist: 3 × 4 giebt 12, diese von 14 abgezogen, bleiben 2 übrig, welche nun zu den 4 Einern gerechnet werden.

δ) Endlich wird mit dem Divisor 4 in die letzte Zahl des Dividendi 4, welche Einer anzeigt, dividirt, zuerst aber muß die übrig gebliebene Zahl von den Zehnern dazu addirt werden, und spricht 4 in 24 ist 6mal enthalten. Dieser Quotient 6 wird nun der vorigen angereiht. Demnach ist der ganze Quotient 2136.

Kürzer: a) 4 : 8544 | 2136 Quot.

÷ 8

4 : 05

÷ 4

4 : 14

÷ 12

4 : 024

÷ 24

0

b)

b) 6 : 46482 | 7747 Quot.
∸ 42
6 : 044
∸ 42
6 : 028
∸ 24
6 : 042
∸ 42
0

oder auf folgende Art:

4 :	8544	6 :	46482
	12		424
Quot.	2136	Quot.	7747

Beweis von der Division.

Dividiren heißt eine dritte Zahl aus zwey gegebenen Zahlen finden, welche anzeigt, wie vielmal eine gegebene, in der andern gegebenen Zahl enthalten sey. (§. 8.)

Nun zeigt der Quotient 2136, als die dritte gefundene Zahl an, daß der Divisor 4 in Dividendo 8544 2136mal enthalten sey.

Also hat man mit 4 ganz richtig in 8544 dividirt.

b) Wenn der Divisor aus mehr als einem Gliede besteht.

Erläut-

Erläuterung.

Das gegebene Exempel sey folgendes: mit 36 soll in 8748 dividirt werden. Zuerst dividirt man mit 3 Dekaden und 6 Unitäten in die 8000. Diese 36 sind in 8000 200mal enthalten, das zeigt der Quotient 2 an, damit multiplizirt man den Divisor 36, giebt das Produkt 72 oder eigentlich 7200, diese abgezogen von der obenstehenden Zahl 8748, so bleibt noch übrig 1548, darein dividirt man ebenfalls mit 36, welches nun 40mal enthalten ist, den Divisor ebenfalls mit dem Quotienten multiplizirt, gibt das Produkt 144, welches von der oben stehenden Zahl 154 abgezogen wird, bleibt alsdann 108 übrig, darinn wird endlich auch mit 36 dividirt, 36 ist in 108 3mal enthalten, mit diesem Quotienten 3 den Divisor gleichfalls multiplizirt, gibt das Produkt 108, welche von den oben stehenden 108 subtrahirt werden, wo alsdann nichts mehr übrig bleibt. Demnach ist der ganze Quotient 243. Dieß Exempel wird auf folgende Art gerechnet.

```
36 : 8748 | 243 Quot.
   ÷ 72
36 : 154
   ÷ 144
36 : 0108
   ÷  108
      000
```

oder auch so

```
36 : 8748
     250
     131
       1
Q. 243
```

Beweis, daß man richtig dividirt hat.

Wann Größen, die durch Zertheilung einer andern Größe entstanden sind, auf eben die Art wieder zusammengesetzt werden, so bekömmt man wieder die größern Größe.

Der Quotient 243 ist entstanden, da man mit 36 in 8748 als die größere Größe dividirte: wenn nun der Quotient und der Divisor wieder zusammengesetzt werden, so kömmt die Größe des Dividendi wieder heraus.

Diese Zusammensetzung geschiehet, wenn man den Quotienten so viel mal nimmt, als der Divisor Einheiten in sich hat, das heißt: man mul-

tiplizirt nur den Quotienten mit dem Divisor, so erhält man die Größe des Dividendi wieder, und erhält man diese, so folgt, daß man richtig dividirt habe: z. E. der Quotient ist

243 Multiplikandus
der Divisor ist × 36 Multiplikator.

1458
729

Pr. 8748 die Größe des Dividendi.

Mit Buchstaben.

Divisor $a + b : aa + 2ab + bb \mid a + b$
$\div\; aa + ab$

$ab + bb$
$\div\; ab + bb$

$0 \quad 0$

Auflösung.

a) Man dividirt mit a in das doppelte a des Dividendi, und spricht a in aa habe ich einmal a.

b) Mit diesem Quotienten a multiplizirt man den Divisor a + b. a mit a multiplizirt giebt aa, und

und a mit b multiplizirt, giebt ab. Das Produkt ist also: aa + ab, dieses Produkt wird unter den Dividendum gesetzt und von demselben abgezogen, also aa weggenommen von aa geht auf, und ab abgezogen von ab^2, bleibt einmal ab noch übrig. Nun setzet man das obenstehende bb des Dividendi herunter und dividirt

c) mit dem Divisor a + b in ab: und spricht a in ab giebt b mal, dieses b kömmt neben dem Quotienten a, dazwischen setzet man das Zeichen +

d) mit diesem b wird der Divisor a + b multiplizirt, und spricht also, b mal b giebt bb und b mal a giebt ab, dieses wird ebenfalls unter den Dividendum gesetzt, und von demselben abgezogen, wo sie sich aufheben. Dieses Exempel durch ein Zahlenbeyspiel erläutert.

6 + 2 :	36	+	12^2	+ 4	|	6 + 2 Q.
÷	36		12			
	0		12	+ 4		
÷			12	+ 4		
			0	0		

Auflösung.

Mit 6 in 36 dividirt, giebt den Quotienten 6, diesen Quotienten 6 multiplizirt man mit dem Divisor 6, 6 $\times$ 6 giebt das Produkt 36, unter die 36 des Dividendi gesetzt, ferner mit dem Quotienten 6, die 2 des Divisors multiplizirt, 6 $\times$ 2 giebt 12, diese setzet man unter die $\overset{2}{12}$, und davon abgezogen, bleibt noch einmal 12 übrig zu diesen, nach dem Zeichen +, die 4 des Dividendi gesetzt, und dann mit dem Divisor 6 in 12 wiederum dividirt, giebt den Quotienten 2, der neben den vorigen nach dem Zeichen + gesetzt wird, mit welchem man ebenfalls den Divisor zuerst 6, hernach 2 multiplizirt, giebt das Produkt 12 und 4, diese von den obigen 12 + 4 abgezogen, läßt nichts übrig. Der Quotient ist also 6 + 2.

Beweis.

Wenn bejahende Größen durch bejahende Größen dividirt werden, so ist der Quotient bejahend (§. 28.)

Nun ist der Divisor a, oder 6 und der Dividendus aa und 36 bejahende Größe.

Also

Also wenn man mit a in aa, und mit 6 in 36 dividirt, so ist der Quotient a und 6 bejahend.

Noch ein Buchstaben-Exempel nach einer andern Art.

Man kann die Buchstaben-Exempeln auch auf folgende Art setzen, daß der Divisor unter den Strich, der Dividendus über den Strich zu stehen kömmt, der Quotient zur Rechten mit dem Zeichen der Gleichheit (=) also

$$\frac{ab}{a} = b \quad \text{oder} \quad \frac{abc}{a} = bc \quad \text{oder} \quad \frac{aa}{a} = a$$

$$\text{oder} \quad \frac{\overset{3}{a}}{a} = aa \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{3}{a}}{a} = \overset{2}{a}$$

Von den Brüchen.

50) Ein Bruch ist ein oder etliche gleiche Theile von einem Ganzen.

51) Die obere Zahl heißt der Zähler, und dieser bestimmt die Theile, die man haben soll und muß, folglich ligt die Quantität allemal im Zähler, die untere Zahl heißt der Nenner,

dieser zeigt an, in wie viel Theile das Ganze getheilet ist.

52) Wie wird der Generalnenner gefunden?

Auflösung.

Er wird gefunden, wenn man alle Spezialnenner zusammen multiplizirt, das Produkt ist alsdann der Generalnenner.

Exempel.

$\frac{7}{8}$ Die Nenner sind 8, 3, 4, diese miteinander mul-
$\frac{2}{3}$ tiplizirt, so kömmt also der Generalnenner her-
$\frac{3}{4}$ heraus: als

$$\begin{array}{r} 8 \times \\ 3 \\ \hline 24 \times \\ 4 \\ \hline 96 \end{array}$$

96 dieß ist der Generalnenner.

53) Wie addirt man Brüche zusammen?

Auflösung.

1) Man dividirt mit den einzelnen Nennern in den gefundenen Generalnenner.

2) Den Quotienten multiplizirt man mit dem Zähler.

3) Die daraus gekommene Facta werden zusammen addirt, die ganze Summe mit dem G. N. dividirt und dann hat man gethan, was verlangt wurde.

96
$\frac{7}{8}$ — 12 — 84
$\frac{2}{3}$ — 32 — 64
$\frac{3}{4}$ — 24 — 72
96 : 220
÷ 192 2 Ganze und $\frac{28}{96}$ | $\frac{7}{24}$ (4)
28

5 (140)
$\frac{4}{28}$ $\frac{6}{7}$ — 20 — 120
$\frac{5}{140}$ General- $\frac{4}{5}$ — 28 — 112
nenner. $\frac{3}{4}$ — 35 — 105
140 : 337
÷ 280 | 2 — $\frac{57}{140}$
57

8 (480)
$\frac{3}{24}$ $\frac{1}{4}$ — 96 — 96
$\frac{4}{96}$ $\frac{3}{4}$ — 120 — 360
$\frac{5}{480}$ G N. $\frac{2}{3}$ — 160 — 320
$\frac{5}{8}$ — 60 — 300
480 : 1076
÷ 960 | 2 — $\frac{29}{120}$
4 : 116 | 29
480 | 120

Anmerkung.

Man kann auch die Brüche abbreviren, und dieses geschiehet, wenn man eine solche Zahl sucht, die im Zähler und im Nenner aufgehet. z. E.

$$\frac{27}{36}\Big|\frac{3}{4}$$ (9)

NB. Die Ziffer 2 hebt zwar alle Brüche auf, deren Zähler oder Nenner zuletzt Nullen oder gerade Zahlen haben, doch ists weit kürzer nach obiger Anmerkung zu verfahren.

54) Wenn alle Spezialnenner im grösten Nenner aufgehen, so ist der gröste der Generalnenner.

Exempel.

a) (24)

$\frac{5}{8}$ — 3 — 15
$\frac{3}{4}$ — 6 — 18
$\frac{2}{3}$ — 8 — 16
$\frac{11}{12}$ — 2 — 22
$\frac{17}{24}$ — 1 — 17

24 : 88
÷ 72 3 — $\frac{2}{3}$
8 : 16
24|$\frac{2}{3}$

b) (36)

$\frac{2}{3}$ — 12 — 24
$\frac{3}{4}$ — 9 — 27
$\frac{5}{6}$ — 6 — 30
$\frac{7}{12}$ — 3 — 21
$\frac{31}{36}$ — 1 — 31

36 : 133
÷ 108 3 — $\frac{25}{36}$
25

Erklärung.

Im ersten Exempel a) ist 24 der gröste Nenner und alle übrigen Nenner, 12, 3, 4, 8, gehen vollkommen auf, wenn man damit in 24 dividirt, also ist 24 der Generalnenner; im zweyten Exempel b) ist 36 der Generalnenner, denn alle andere spezielle Nenner, als 12, 6, 4, 3, gehen vollkommen auf, wenn man darinn dividirt, oder sind gerade und vollkommen 3mal, 6mal, 9mal, 12mal in ihm enthalten.

Subtraction.

55) Brüche zu subtrahiren, wenn die Nehner gleich und ungleich sind.

Auflösung.

Man ziehet nur den kleinern Zähler vom größern Zähler ab, im ersten Fall was übrig bleibt, ist ein neuer Zähler, darunter man den Nenner setzet; im zweyten Fall sucht man den Generalnenner Multiplikando der beyden Spezialnenner.

Exem-

Exempel.

$$\text{a)}\ \frac{7}{8} \quad \div \frac{3}{8} \quad \text{Rest}\ \frac{4}{8}$$

$$\text{b)}\ \frac{11}{12} \quad \div \frac{5}{12} \quad \frac{6}{12}$$

$$\text{c)}\ \frac{23}{24} \quad \div \frac{9}{24} \quad \frac{14}{24}$$

$$\text{d)}\ (21)\quad \frac{2}{3} - 7 - \frac{14}{21}; \quad \div \frac{3}{7} - 3 - \frac{9}{21} \div; \quad \frac{5}{21}$$

$$\text{e)}\ (56)\quad \frac{7}{8} - 7 - \frac{49}{56}; \quad \div \frac{4}{7} - 8 - \frac{32}{56}; \quad \text{Rest}\ \frac{17}{56}$$

$$\text{f)}\ (12)\quad \frac{11}{12} - 1 - \frac{11}{12}; \quad \div \frac{3}{4} - 3 - \frac{9}{12} \div; \quad \frac{2}{12} \Big| \frac{1}{6}$$

Beweis.

Werden Größen, die durch Theilung aus einer andern Größe entstanden sind, wieder zusammengesetzt, so kommt die nemliche Größe wieder heraus (§. 23.) Nun also z. E.

$$\text{nf)}\ (12)\quad \frac{11}{12} - 1 - \frac{11}{12}; \quad \div \frac{3}{4} - 3 - \frac{9}{12} \div; \quad 2 : \frac{2}{12} \Big| \frac{1}{6}\ \text{Rest.}$$

56) Subtrahiren mit Borgen, und zwar, wenn die Nenner gleich sind.

Auflösung.

Man borgt ein Ganzes bey der neben stehenden ganzen Zahl, dieses geborgte Ganze hat so viel Theile, als der Nenner anzeiget, hierzu addirt man den Zähler des obern Bruchs, und ziehet von der Summe den Zähler des untern Bruchs ab.

Exem-

Exempel.

	a)	b)	c)
	$7\frac{3}{7}$	$9\frac{2}{5}$	$14\frac{5}{9}$
	$4\frac{6}{7}$ ÷	$4\frac{4}{5}$ ÷	$8\frac{7}{9}$ ÷
Rest	$2\frac{4}{7}$	$4\frac{3}{5}$	$5\frac{7}{9}$

Erläuterung

des Exempels b). Ich soll von 9 als einer ganzen Zahl und $\frac{2}{5}$ als einem Bruch abziehen, die ganze Zahl 4 und den Bruch $\frac{4}{5}$: $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{5}$ abziehen, kann ich nicht, also muß ich von der neben stehenden Zahl 9 ein Ganzes abborgen, der Nenner bestimmt mir aber, wie viele dieses Ganze habe, nämlich 5 Theile, dazu den obern Zähler die 2 addirt, giebt 7, von $\frac{7}{5}$ können $\frac{4}{5}$ wohl abgezogen werden, und bleiben $\frac{3}{5}$ übrig. Die ganze Zahl 9 bedeutet aber nun nicht mehr 9, weil ein Ganzes weggeborgt ist, sondern nur noch 8, von diesem Ganzen 8, 4 Ganze abgezogen, bleiben also noch 4 Ganze übrig.

Multiplikation.

57) Brüche zu multipliziren.

Auf-

Auflösung.

a) Es werden die beyden Nenner multiplizirt, das Produkt ist der Nenner des neuen Bruchs.

b) Werden auch die beyden Zähler miteinander multiplizirt, das Produkt ist der Zähler des neuen Bruchs.

Exempel.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$

2 10

$\frac{2}{6} | \frac{1}{3}$ Prod. $\frac{21}{32}$ P. $\frac{20}{30} | \frac{2}{3}$ P.

58) Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren.

Auflösung.

1) Es wird der Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplizirt.

2) Das Product mit dem Nenner dividirt, was heraus kommt, sind ganze Zahlen.

Exempel.

a) $4 \times \frac{3}{4} = 12 | 3$ G. b) $5 \times \frac{7}{8} = 35 | 4 - \frac{3}{8}$

4 : 8 : $\frac{32}{3}$ ÷

c) $12 \times \frac{4}{5} = 48 | 9 - \frac{3}{5}$ d) $14 \times \frac{5}{8}$ $70 | 11 - \frac{2}{3}$

5 : 6 :

÷ 45 ÷ 6

3 6 : 10

6 ÷

4

59)

59) Eine ganze Zahl und einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliziren.

Auflösung.

a) Mit dem Nenner des Bruchs wird die dabey stehende ganze Zahl multiplizirt und der Zähler dazu addirt.

b) Das heraus gekommene Produkt wird mit dem Multiplikator, als der andern ganzen Zahl auch multiplizirt.

c) Wird mit dem Nenner des Bruchs in dieses Produkt dividirt.

Exempel.

a) $4 \times 3\frac{2}{3}$
2
$11 \times 4 = 44 \mid 14\frac{2}{3}$ Prod.
$33 \mid$

b) $6 \times 3\frac{7}{8}$
$22 \mid$
$31 \times 6 = 186 \mid 23\frac{1}{4}$ Prod.
$88 \mid$

c) $8 \times 7\frac{6}{7}$
26
$55 \times 8 = 440 \mid 62\frac{6}{7}$ Prod.
$77 \mid$

d) $20 \times 8\frac{3}{4}$
32
$35 \times 20 = 700 \mid 175$ G. Pr.
$444 \mid$

60) Ganze Zahlen und Brüche mit ganzen Zahlen und Brüchen zu multipliziren.

Auf=

Auflösung.

a) Man multiplizire die ganze Zahl mit dem Nenner des dabeystehenden Bruchs, und addire den Zähler dazu; so verfahre man im Multiplikator, und auch im Multiplikandus.

b) Die beyde herausgekommene Produkte werden miteinander multiplizirt.

c) Werden die Nenner miteinander multiplizirt, und

d) mit ihrem Produkt dividire man in das Faktum der beyden Zähler.

Exempel.

a) $5\frac{4}{5} \times 8\frac{3}{7}$

$29 \times 59 =$

Nenn. $7 \times 5 = 35.$

```
       59
       29
      ---
      531
     118
     ----
35 : 1711 | 48 31/35 Prod.
   ÷ 140
     ---
35 :  311
   ÷  280
      ---
       31
```

b) $6\frac{7}{8} \times 10\frac{2}{3}$

N. 8 × 3 = 24.

```
          55 × 32
               55
              ----
              160
             160
            -----
   24 : 1760 | 73 1/3 Prod.
      ÷ 168
        ----
          80
       ÷  72
        ----
           8
        8/24 | 1/3
```

61) Eine ganze Zahl nebst einem Bruche, mit einem Bruche zu multipliziren.

Auflösung.

a) Man multiplizirt die ganze Zahl mit dem Nenner des dabeystehenden Bruchs, und addirt den Zähler dazu.

b) Mit dem Zähler des Bruchs, als Multiplikator, wird das nach a) herausgekommene Produkt multiplizirt und

c) und d) verfährt man wie §. 60. c) und d) schon angeführt ist.

Exempel

a) $\frac{2}{3} \times 6\frac{3}{4}$

Nenn. 3 × 4 = 12.

```
           27
            2 ×
          ----
   12 : 54 | 4 1/2 Prod.
      ÷ 48
        ---
         6
      6/12 | 1/2
```

b)

b) $\frac{5}{6} \times 7\frac{4}{5}$

Nenn. $6 \times 5 = 30$.

$$\begin{array}{r} 39 \\ 5 \times \\ \hline 30 : 195 \mid 6\tfrac{1}{2} \text{ Prod.} \\ \div\ 180 \\ \hline \tfrac{15}{30} \mid \tfrac{1}{2} \end{array}$$

c) $\frac{7}{8} \times 9\frac{8}{9}$

N. $8 \times 9 = 72$.

$$\begin{array}{r} 89 \\ 7 \times \\ \hline 72 : 623 \mid 8\tfrac{47}{72} \text{ Prod.} \\ \div\ 576 \\ \hline 47 \end{array}$$

Division.

62) Einen Bruch mit einem Bruch zu dividiren.

Auflösung.

a) Mit dem Nenner des Divisors multiplizirt man den Zähler des Dividendi.

b) Das herausgekommene Produkt setzet man unter den Bruch, dessen Zähler man multiplizirte.

c) Mit dem Nenner des Dividendi multiplizirt man den Zähler des Divisors, das Produkt kömmt unter den Divisor.

d) Mit diesem Produkt des Divisors dividirt man in das Produkt des Dividendi.

Exem-

Exempel.

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ — 3×5

$10\ 10 : 12 \mid 1\frac{1}{5}$ Q.

$\div 10$

$\frac{2}{10} \mid \frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{4} : \frac{7}{8}$ — 4×8

$24 : 28 \mid 1\frac{1}{6}$

$\div 24$

$\frac{4}{24} \mid \frac{1}{6}$

c) $\frac{4}{5} : \frac{8}{9}$ — 5×9

$36 : 40 \mid 1\frac{1}{9}$

$\div 36$

$\frac{4}{36} \mid \frac{1}{9}$

d) $\frac{5}{8} : \frac{7}{10}$ — 8×10

$50 : 56 \mid 1\frac{6}{50}$

$\div 50$

6

e) $\frac{4}{7} : \frac{9}{10}$ — 7×10

$40 : 63 \mid 1\frac{23}{40}$

$\div 40$

23

63) Mit einer ganzen Zahl in einen Bruch zu dividiren.

Auflösung.

a) Man multiplizirt mit der ganzen Zahl, als den Divisor, den Nenner des Bruchs.

b) Das herausgekommene Produkt wird der neue Nenner, und der Zähler bleibt unverändert der Zähler eines neuen Bruchs.

Exempel.

a) $3 : \frac{7}{8}$ — $24\ \frac{7}{24}$ Quot.

b) $5 : \frac{6}{7}$ — $35\ \frac{6}{35}$

c) $8 : \frac{10}{11}$ — $88\ \frac{10}{88} \mid \frac{5}{44}$

64) Mit einem Bruch in eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung.

a) Man multiplizirt die ganze Zahl, als den Dividendum, mit dem Nenner des Bruchs als den Divisor;

b) Mit dem Zähler des Divisors wird in das Produkt dividirt.

Exempel.

a) $\frac{2}{3} : 5$
$2 : 15 \mid 7\frac{1}{2}$ Q.
$\div 14$
1

b) $\frac{6}{7} : 8$
$6 : 56 \mid 9\frac{1}{3}$
$\div 54$
$\frac{2}{6} \mid \frac{1}{3}$

c) $\frac{4}{5} : 13$
$4 : 65 \mid 16\frac{1}{4}$
$\div 4$
25
$24 \div$
$\frac{1}{4}$

65) Mit einer ganzen Zahl in eine ganze Zahl und einen Bruch zu dividiren.

Auflösung.

a) Man multiplizire die ganze Zahl des Dividendi mit dem Nenner des dabey stehenden Bruchs, und addire den Zähler dazu.

b) Man multiplizire deßgleichen den Divisor mit dem Nenner des Bruchs.

c) Mit dem Produkt des Divisors dividirt man in das Produkt des Dividendi.

Exem-

Exempel.

a) $4 : 8\frac{2}{3}$

$12 : 26 \mid 2\frac{1}{6}$ Q.
$\div 24$
$\frac{2}{12}\ \frac{1}{6}$

b) $5 : 9\frac{3}{4}$

$20 : 39 \mid 1\frac{19}{20}$
$\div 20$
$\frac{19}{20}$

c) $8 : 2\frac{2}{3}$

$24\quad \frac{8}{24}, \frac{1}{3}$ Q.

66) Mit einer ganzen und gebrochenen Zahl in eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung.

a) Man multiplizirt die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, und addirt den Zähler dazu.

b) Den Dividendum multiplizirt man ebenfalls mit dem Nenner des Bruchs.

c) Mit dem Produkt des Divisors dividirt man alsdann in das Produkt des Dividendi.

Exempel.

a) $5\frac{2}{3} : 8$

$17 : 24 \mid 1\frac{7}{17}$ Q.
$\div 17$
7

b) $6\frac{3}{4} : 4$

$27 : \frac{16}{27}$ Q.

c) $3\frac{1}{2} : 5$

$7 : 10 \mid 1\frac{3}{7}$ Q.
$\div 7$
3

d) $6\frac{4}{5} : 8$

$34 : 40 \mid 1\frac{3}{17}$
$\div 34$
6

67) Mit einer ganzen und gebrochenen Zahl in einen Bruch zu dividiren.

Auflösung.

a) Verfährt man eben so wie §. 66. a)

b) Das Produkt des Divisors multiplizirt man mit dem Nenner des Dividendi.

c) Den Zähler des Dividendi multiplizirt man mit dem Nenner des Divisors.

d) Ist das Produkt des Dividendi kleiner, als des Divisors, so entstehet ein Bruch.

Exempel.

a) $3 \frac{2}{3} : \frac{7}{8}$

$11 \quad \frac{21}{88}$ Quot.
8
88

b) $6 \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$

$27 \quad \frac{20}{162} | \frac{10}{81}$ Quot.
6
162

68) Mit einer gebrochenen Zahl in eine ganze und gebrochene Zahl zu dividiren.

Auflösung.

a) Man multiplizirt die ganze Zahl des Dividendi mit dem Nenner seines Bruchs, und addirt den Zähler dazu.

b) Den Zähler des Divisors multiplizirt man mit dem Nenner des Dividendi.

c) Das Produkt des Dividendi multiplizirt man mit dem Nenner des Divisors.

d) In dieses Produkt dividirt man endlich mit dem Produkt des Divisors.

Exempel

a) $\frac{2}{3} : 4\frac{3}{4}$

8 19

3 ×

$8 : 57 \mid 7\frac{1}{8}$ Q.

÷ 56

1

b) $\frac{5}{6} : 2\frac{1}{3}$

15 7

6 ×

$15 : 42 \mid 2\frac{4}{5}$ Q.

÷ 30

$\frac{12}{15} \mid \frac{4}{5}$

69) Mit einer ganzen und gebrochenen Zahl in eine ganze und gebrochene Zahl zu dividiren.

Auflösung.

a) Gilt eben das beym Divisor und dem Dividendus wie §. 68. a)

b) Das Produkt des Dividendi wird mit dem Nenner des Divisors multiplizirt.

c) Das Produkt des Divisors multiplizirt man mit dem Nenner des Dividendi, und

d) mit dem Produkt des Divisors dividirt man endlich in das Produkt des Dividendi.

Exempel.

a) $4\frac{2}{3} : 6\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{ll} 14 & 27 \\ 4\times & 3\times \\ \hline 56 & 56 : 81 \mid 1\tfrac{25}{56}\ \text{Q.} \\ & \div\ 56 \\ \hline & 25 \end{array}$$

b) $6\frac{3}{8} : 8\frac{4}{8}$

$$\begin{array}{ll} 51 & 52 \\ 6\times & 8\times \\ \hline 306 : & 416 \mid 1\tfrac{55}{153}\ \text{Q.} \\ & 306 \\ \hline & \tfrac{110}{306} \Big| \tfrac{55}{153} \end{array}$$

c) $12\frac{3}{4} : 24\frac{5}{8}$

$$\begin{array}{lll} 51 & & 149 \\ 6\times & & 4\times \\ \hline 306 & : & 596 \mid 1\tfrac{145}{153}\ \text{Q.} \\ & & \div\ 306 \\ \hline & & \tfrac{290}{306} \Big| \tfrac{145}{153} \end{array}$$

Von der Quadratzahl und ihrer Wurzel.

70) Das Produkt, welches herauskommt, wenn man eine gewisse Zahl durch sich selbst multiplizirt, heißt eine Quadratzahl. Die Zahl aber, welche man mit sich selber multiplizirt, heißt die Quadratwurzel.

Anmerkung. Eine jegliche Zahl, von 1 bis in das Unendliche, kann eine Quadratwurzel seyn, weil

weil jede Zahl mit sich selbst multiplizirt werden kann.

Erläuterung.

Wenn 3 mit 3 multiplizirt wird, so wird das Produkt 9 das Quadrat; und 3 ist die Quadratwurzel, 6 mit 6 multiplizirt giebt 36, diese ist die Quadratzahl, und 6 die Quadratwurzel. So ist auch 100 das Quadrat von 10, und 10 die Quadratwurzel von 100. 1000 das Quadrat von 100, und 100 die Quadratwurzel von 1000.

Die Ausziehung der Quadratwurzel.

71) Die Quadratwurzel ausziehen, heißt, diejenige Art zu rechnen, nach welcher man aus einer jeden Zahl, als Quadratzahl betrachtet, die Zahl findet, aus welcher multiplikando durch sich selbst die Quadratzahl entstanden ist, z. E. aus 16.

4:	16	4
	16	
	0	

Anmerkung.

Zur Ausziehung der Quadrat und Kubikwurzel ist folgendes Täfelchen sehr nützlich.

Wurz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubz.	1	8	27	64	125	216	346	512	729	1000

72) Wie verfährt man beym Ausziehen der Quadratwurzel?

Auflösung.

a) Man theile die gegebene Zahl in Klassen von der rechten zur linken Hand, jede Klasse bestehet aus zwey Ziffern, die äußerste Klasse zur linken Hand, kann auch nur eine Ziffer enthalten.

Anmerkung. So viel Klassen die Quadratzahl hat, so viel hat auch die Quadratwurzel.

b) Suchet man in der Wurzeltafel eine Quadratzahl, die so groß, oder nächst kleiner ist, als die erste: die Wurzel ist alsdann die erste Ziffer der gesuchten Quadratwurzel.

c) Die Quadratzahl des gefundenen ersten Theils der Wurzel wird von der ersten Klasse subtra-

hirt, neben dem Rest der ersten Klasse die zweyte Klasse beygesetzt.

d) Der gefundene erste Theil der Wurzel wird verdoppelt.

e) Mit der gedoppelten Zahl wird in obenstehende Zahl dividirt.

f) Setzet man den Quotienten, als den zweyten Theil der Wurzel, neben den ersten Theil derselben, und auch neben der doppelten des ersten Theils.

g) Dieser zweyte Theil der Wurzel ist, mit dem doppelten des ersten Theils der Wurzel, und mit sich selbst zu multipliziren, das Factum wird von dem Rest der ersten und der zweyten Klasse subtrahirt.

h) Neben den Rest der zweyten Klasse kömmt die dritte Klasse.

i) Verdoppelt man die beyden ersten Theile der Wurzel, das Doppelte unter den Rest der zweyten und unter die dritte Klasse gesetzt, mit diesem alsdann darein dividirt, den Quotienten der dritten Klasse zum Quotienten der ersten und zweyten, und auch neben den Divisor gesetzt.

k) Mit

k) Mit dem dritten Quotienten, multiplizirt man den verdoppelten Quotienten, das herausgekommene Produkt subtrahirt man endlich von dem Rest der zweyten und von der dritten Klasse.

Erläuterung.

```
13|24|96|3
 9
----
 424
```

Nach a) wird die gegebene Zahl in Klassen getheilt.

```
13|24|96|3
 9      2
----   --
 424    6
```

Nach b) suchet man im Wurzeltäfelchen eine Quadratzahl u. s. w. bey 13 ist die nächst kleinere Quadratzahl 9, die Wurzel von 9 ist 3, den 9 ist aus 3 entstanden, 3 wird also hinter den Strich gesetzt.

```
13|24|96|3
 9      2
----   --
 424    6
  6
----
```

Nach c) wird die Quadratzahl des gefundenen ersten Theils der Wurzel von der ersten Klasse subtrahirt, und die zweyte daneben geschrieben.

```
13|24|96|3 6
 9      2
----   --
 424    6
  66
```

Nach d) wird der gefundene erste Theil der Wurzel verdoppelt.

Nach e) dividirt man mit der gedoppelten Zahl des ersten Theils in die obenstehende Zahl, nämlich

den

```
13|24|96|3 6
 9        2
424       6
 66
  6
396
 2896
```

den Rest der ersten, und in die zweyte Klasse.

Nach f) setzet man den Quotienten, als den zweyten Theil der Wurzel neben den ersten Theil, nämlich 3, und unter die zweyte Ziffer der zweyten Klasse.

Nach g) ist der zweyte Theil der Wurzel mit dem doppelten des ersten Theils u. s. w. zu multipliziren, und das Faktum ist zu subtrahiren.

```
13|24|96|3 64
 9        2
424       6
 66      36
  6       2
396      72
 2896
 (724)
    4
 2896
 0000
```

Nach h) kommt neben den Rest der zweyten Klasse die dritte Klasse.

Nach i) verdoppelt man die beyden ersten Theile der Wurzel: nämlich

```
36
 2
72
```

Dieses doppelte 72 kommt unter den Rest der Zweyten und unter die erste Zahl der dritten Klasse zu stehen, darauf wird mit 72 in 289 dividirt, und sage also 72 in 289 ist 4mal enthalten,

ten, der Quotient, welcher in diesem Exempel 4 ist, wird neben den Quotienten der ersten und zweyten Klasse, wie auch neben den Divisor 72 gesetzt.

Nach k) wird mit dem 3 Quotienten multiplizirt, nämlich mit 4 multiplizirt man 724, das Produkt wird subtrahirt, nämlich 2896 subtrahirt von 2896, und dann ist die Quadratwurzel 364 gefunden.

Noch ein Exempel.

```
11|97|16|3 4 6
 9        2
----     ---
 297      6
 (64)     34
    4      2
 ----     ---
  256     68
-----
 4116
 (686)
     6
-----
 4116
-----
 0000
```

B e w e i s.

Wenn man die gefundene Quadratwurzel mit ihr selbst multiplizirt, so kommt die gegebene Zahl wieder heraus. Wenn also Größen auf die

die Art wieder zusammengesetzt werden, wie sie zerlegt wurden, so kömmt die nämliche Größe wieder heraus.

Nun werden die zerlegten Größen multiplikando wieder zusammengesetzt.

Also kommen die nämlichen Größen wieder heraus.

Exempel.

Die Quadratwurzel des ersten Exempels ist 364, diese mit sich selbst multiplizirt

```
     364
     364
   ------
    1456
   2184
  1092
  ------
  132496
```

oder auf folgende Art kann man auch sehen, ob man die rechte Quadratwurzel gefunden habe, wenn man mit der Quadratwurzel in die gegebene Zahl dividirt, alsdann muß die Quadratwurzel wieder herauskommen.

364 : 132496 | 364 Quadratw.
1092
————
2329
2184
————
1456
1456
————
0000

73) Wie ziehe ich aus einer gegebenen Zahl, die kein vollkommenes Quadrat ist, die Quadratwurzel heraus?

Auflösung.

Man verfahre eben so wie §. 72., merke sich aber dabey noch folgendes. Wenn die Wurzel aus ganzen Zahlen und einem Bruch bestehet, so kann man 10, 100 Theilchen haben, wenn man 2, 4, Nullen hinten anhängt und fortrechnet. Denn wenn man die Einheit in der Quadratzahl in 100 Theile theilet, durch multiplikando 100, so wird die Wurzel in 10 Theile getheilt *).

Exem-

*) Die Aufgabe und das Exempel aus Wolfs Anfangsgründe der Mathematik.

Exempel.

```
3|45 | 18 57/100 Quadratw.
1      1/2
----------
2|45
 (28)
 224
----------
  21
----------
 21|00
  (365)
  1825
-----------
   27500
   (3707)
-----------
   25949
-----------
    1551
```

Anmerkung. Weil es hier nicht aufgeht, so sehen wir, daß es ein Bruch wird, nun müssen wir die Einheit in 100 Theilchen multiplikando theilen 21

100

2100 itzt fährt man im rechnen wieder weiter fort, nämlich: man verdoppelt die gefundene Wurzel 18

2

36 und dividirt in 2100, die Wurzel 185, nochmalen verdoppelt

185
2
———
370 und abermal dividirt u. s. w.

Probe.

Die gefundene Wurzel wird mit sich selbst multiplizirt, und das übrig gebliebene Produkt dazu addirt.

```
   1857
   1857
 -------
  12999
  9285
 14856
 1857
 -------
3448449
   1551
 -------
3450000
```

Von der Kubikzahl und ihrer Wurzel.

74) Wenn eine jede Quadratzahl durch ihre Wurzel multiplizirt wird, so hat man die Kubikzahl, oder eine Kubikzahl ist das Produkt aus der Quadratzahl mit ihrer Wurzel multiplizirt.

Von der Ausziehung der Kubikwurzel.

75) Die Kubikwurzel ausziehen, heißt, die Art zu rechnen, nach welcher man diejenige Zahl findet,

findet, aus welcher die Kubikzahl, als aus ihrer ersten Dignität multiplikando entstanden ist.

Anmerkung. So viel Klassen die Kubikzahl hat, so viele Theile hat ihre Wurzel.

76) Wie ziehet man aus einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel heraus?

Auflösung.

a) Die gegebene Zahl wird in Klassen eingetheilt, jede Klasse bekommt drey Ziffern.

b) In dem Wurzeltäfelchen suchet man eine Kubikzahl, welche derjenigen so in der letzten Klasse zur Linken stehet, am nächsten kleiner ist.

c) Die Kubikzahl des gefundenen ersten Theils der Wurzel, wird von der ersten Klasse subtrahirt, neben den Rest der ersten Klasse kommt die zweyte Klasse zu stehen.

d) Der gefundene erste Theil der Wurzel wird mit sich selbst multiplizirt, und dieses Produkt nochmals mit 3 multiplizirt.

e) Das Produkt setzet man unter die erste Zahl der zweyten und letzten Zahl der ersten Klasse.

f) Mit diesem Produkt, als dem dreyfachen Quadrat wird dividirt.

g) Mit dem zweyten Theil der Wurzel wird der Divisor multiplizirt, und das Produkt unter den Divisor gesetzt.

h) Der zweyte Theil der Wurzel wird 1) mit sich selbst 2) mit dem ersten Theil der Wurzel, und 3) noch mit 3 multiplizirt.

i) Die letzte Ziffer des Produkts kömmt unter die zweyte Ziffer der zweyten Klasse zu stehen.

k) Aus dem zweyten Theile der Wurzel wird ein Kubus gemacht.

l) Die letzte Ziffer dieses Kubus setzet man unter die dritte Ziffer der zweyten Klasse.

m) Alle die untereinander stehende Produkte werden zusammen addirt.

n) Die Summe von dem Rest der ersten Klasse und von der zweyten Klasse wird subtrahirt.

o) Neben den Rest kommt die dritte Klasse zu stehen.

p) Aus den beyden ersten Theilen der Wurzel wird eine Quadrat gemacht, und dieses Quadrat wieder mit 3 multiplizirt.

q) Das Produkt wie gewöhnlich unter die zweyte und dritte Klasse geschrieben.

r) Mit diesem Produkt nach q) dividirt.

s) Mit

s) Mit dem dritten Theil der Wurzel den Divisor multiplizirt.

t) Der dritte Theil der Wurzel 1) mit sich selbst 2) mit den beyden ersten Theilen der Wurzel, und 3) mit 3 nochmals multiplizirt.

u) Dieses Produkt wird so gesetzt, daß die hinterste Zahl unter die zweyte Zahl der dritten Klasse zu stehen kömmt.

v) Aus dem dritten Theil der Wurzel ein Kubus gemacht, und unter die dritte Ziffer der dritten Klasse geschrieben.

w) Endlich werden alle Produkte zusammen addirt, und von den obenstehenden Ziffern subtrahirt.

Exempel und Erläuterung desselben *).

```
nach a) 47|437|928|  b 362 Kubikw.   6
     b  27            3               6
     c  20437         9              36
     e  (27)          3               3
     f    6          27 d           108
     g  162                           3
     i   324                        324 h
     l    216
     m 19656
     n     781928 o                   6
     qr    3888                       6
              2                      36
     s     7776                       6
             432  u     Kubus       216 k
               8  v
     w     781928
     w     000000

        36           2              2
        36           2              2
       216           4              4
       108          36              2
      1296         144      Kub.    8 v
         3           3
      3888 p       432 t
```

Probe

*) Ebenfalls aus Wolfs Anfangsg. der Mathemat.

Probe und Beweis.

Die Probe geschieht, welche alsdann der Beweis ist, daß man richtig die Kubikwurzel ausgezogen habe, wenn man die ganze Kubikwurzel quadrirt, und dieses Quadrat mit der gefundenen Kubikwurzel multiplizirt und kubirt, so muß die gegebene Kubikzahl wieder völlig herauskommen.

Exempel.

```
     362
     362
   -----
     724
   2172
  1086
  ------
  131044
     362
  ------
  262088
 786264
393132
--------
47437928
```

77) Aus einem Bruch die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung.

Man soll aus $\frac{26}{212}$ die Kubikwurzel ziehen, so theilet man 26 in 1000 Theilchen, darauf suchet man die Kubikzahl und Wurzel, und verfährt dabey nach den gegebenen Regeln §. 76.

Exempel.

26|000| 2 $\frac{8}{18}$ Kubw.	2	8	8
8	2	8	8
18000	4	64	64
12	3	2	8
96	12 d	128 Kub	512 k
384		3	
512		384 h	
13952			
4048			

Probe.

Die Kubikwurzel wird mit sich selbst multiplizirt, dann kubirt, und das übrig gebliebene dazu addirt. Dieses Produkt ist alsdann die gegebene Kubikzahl.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \\ 28 \\ \hline 6272 \\ 1568 \\ \hline 21952 \\ 4048 \\ \hline 26000 \end{array}$$

26000 die gegebene Kubikzahl.

Qua=

Quadrat und Kubikzahl mit Buchstaben.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & a & + & b & \text{rad.} \\
 & & a & + & b & \\
\hline
 & & ab & + & b^2 & \\
a^2 & + & ab & & & \\
\hline
a^2 & + & 2ab & + & b^2 & \text{quad.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & & & a & + & b & \\
\hline
 & & a^2b & + & 2ab^2 & + & b^3 & \\
a^3 & + & 2a^2b & + & ab^2 & & & \\
\hline
a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & \text{Cub.}
\end{array}
$$

Quadrat.

$$
\begin{array}{l}
a + b : a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b \text{ rad.} \\
\qquad\quad a^2 + ab \\
\hline
a + b : \qquad ab \quad b^2 \\
\qquad\qquad\; ab \quad b^2 \\
\hline
\qquad\qquad\; 0 \quad\; 0
\end{array}
$$

Cub.

$$
\begin{array}{l}
a + b : a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a^2\ 2ab + b^2 \text{ quad.} \\
\qquad\quad a^3 \quad a^2b \\
\hline
a + b : - + 2a^2b + 3ab^2 \\
\qquad\qquad\; 2a^2b + 2ab^2 \\
\hline
a + b : \qquad\quad + ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; ab^2 + b^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Cub.

$$
\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 : a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a + b \text{ rad.} \\
\qquad\qquad\qquad a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 : - + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad - \quad - \quad -
\end{array}
$$

 Die

Die Lehre von den Verhältnissen.

78) Ein Verhältniß, (ratio) ist das Verhalten, oder vielmehr die Vergleichung zweyer Größen von einerley Art, gegen einander, welche die eine Größe aus, oder nach der andern bestimmt.

Erläuterung.

Will man ein Stück Tuch nach seiner Länge und Breite bestimmen, so muß man eine andere Länge, d. i. die Elle haben, durch welche man kann die Länge und Breite des Tuchs bestimmen. Es stehet demnach die Elle und das Tuch in Vergleichung, und eben daher im Verhältniß.

79) Die im Verhältniß stehende Größen, werden Glieder der Verhältniß genennt.

80) Das bestimmte Glied, aus welchem das zweyte Glied bestimmt wird, heißt (terminus antecedens prior) das vorhergehende, das bestimmte Glied heißt (terminus posterior consequens) das folgende, oder nach Kästner: man siehet in jeder Verhältniß ein Glied als das vorhergehende, und das andere als das folgende an.

81) Diejenige Bestimmung zweyer Größen gegen einander, oder Vergleichung zweyer Größen gegen=

geneinander, welche anzeigt, um wie viel Einheiten, die eine Größe größer oder kleiner, als die andere Größe ist, welches durch die Subtraction geschieht, wird die arithmetische Verhältniß (ratio arithmetica) genennt. z. E. 4 : 12 die Größe 12 ist um 8 Unitäten größer, als 4, und die Größe 4 ist um 8 Unitäten kleiner als 12.

82) Die Anzahl Einheiten, die zwischen zwey Größen, die in einem arithmetischen Verhältnisse stehen, sich befindet, wird ihr Differenz oder Unterschied genennt. Z. E. 6 : 8, diese zwey Zahlen 6 und 8 stehen in arithmetischer Verhältniß, indem die Zahl 8 um 2 Unitäten größer ist, als die Zahl 6, die Zahl 2 aber, welche dazwischen stehet, heißt der Differenz oder Unterschied, indem sie anzeiget, daß 8 um 2 größer ist, als 6.

83) Die Bestimmung oder Vergleichung zweyer Größen gegeneinander, welche anzeigt, um wie vielmal die eine Größe größer ist, als die andere, welches durch die Division geschieht, heißt geometrische Verhältniß (ratio geometrica). Z. E. 12 ist 3mal größer als 4, denn 4 ist in 12 3mal enthalten.

84) Die Zahl, welche anzeigt, um wie vielmal die eine Größe größer ist, als die andere, heißt Exponens (rationis) z. E. die Zahl 3 ist der Exponens zwischen den zwey in geometrischer Verhältniß stehenden Zahlen 4 und 12, denn 3 zeigt an, daß 4 in 12 3mal enthalten sey.

85) Wenn die im Verhältniß stehende Größen einander gleich sind, so heißt eine solche Verhältniß, eine gleiche Verhältniß (ratio æqualitatis) z. E. 8 und 8. Sind sie aber einander ungleich, eine ungleiche Verhältniß (ratio inæqualitatis) z. E. $4 :^{8} 12$ $4 :^{3} 12$.

86) Wenn in ungleichen Verhältnissen, das erste Glied kleiner, als das zweyte Glied ist, so heißt diese Verhältniß (ratio minoris termini,) ists aber größer, (ratio majoris termini) z. E. $4 :^{8} 12$, und $12 :^{8} 4$, $4 :^{3} 12$, und $12 {}^{3}: 4$.

87) In der arithmetischen Verhältniß (minoris termini,) wird der Differenz zum kleinern Gliede addirt, und alsdann hat man das größere Glied. Z. E. $4 \,^{8} 12$, 8 zu 4 addirt, macht das größere Glied 12. In der arithmetischen Verhältniß (majoris termini) wird der Differenz vom

grö-

größern Gliede subtrahirt, alsdann hat man das kleinere Glied, z. E. 12 · 4 12 ∸ 8 = 4.

88) In der geometrischen ungleichen Verhältniß ist das größere Glied das Faktum aus dem kleinern Glied und dem Exponenten, z. E. in 4 ˒ 12, ist 12 multiplikando aus dem kleinen Gliede 4 und dem Exponenten 3 entstanden 4 × 3 = 12. In ungleicher Verhältniß ist das kleinere Glied der Quotient aus dem größern Gliede dividirt mit dem Quotienten z. E. in das Verhältniß 4 ˒ 12, ist 4 das kleinere Glied, das aus 12 dividendo mit dem Exponenten 3 entstanden ist. 3 : 12 | 4
12
0

89) Wie findet man die Verhältnisse zwischen zwo gegebenen Größen in geometrischer Verhältniß?

Auflösung.

Man dividirt mit der kleinern Größe in die größere Größe, so giebt der Quotient den Exponenten, z. E. 4 : 12 | 3,
12
0

das heißt 12 ist 3mal größer als 4, sollte aber

was

was übrig bleiben, so wirds ein Bruch, z. E.

$$\begin{array}{l} \quad 3\tfrac{1}{2} \\ 4 \quad 14, \quad 4 : 14 \mid 3\tfrac{1}{2}. \\ \quad\ \underline{12} \\ \quad\ \tfrac{2}{4} \mid \tfrac{1}{2} \end{array}$$

4 ist also in 14, $3\tfrac{1}{2}$mal enthalten, der Exponent ist also $3\tfrac{1}{2}$.

90) Wie findet man die Verhältnisse zwischen zwo gegebenen Größen in arithmetischer Verhältniß?

Auflösung.

Man ziehe nur das kleinere Glied vom größern Gliede ab, der Rest ist der Differenz zwischen beyden Gliedern. Z. E. 6 ˙ 8 6 ∸ 8 = 2.

91) Die Aehnlichkeit und Gleichheit zwoer arithmetischen Verhältnisse heißt eine arithmetische Proportion, (Proportio arithmetica) z. E. 3 ˙ 5 — 6 ˙ 8. Man spricht also, wie sich die erste Zahl (3) verhält zur zweyten Zahl (5) eben so verhält sich die dritte Zahl (6) zu der vierten Zahl (8), um wie vielmal nämlich die erste Zahl (3) von der zweyten Zahl (5) kleiner ist, um eben so vielmal ist die dritte Zahl (6) kleiner, als die vierte Zahl (8) oder um wie viel Einheiten die zweyte Zahl (5) größer

ßer ist als die erste Zahl (3), um eben so viel Einheiten ist die vierte Zahl (8) größer als die dritte Zahl (6).

92) Der Differenz in einer arithmetischen Proportion muß gleich seyn, wenn man das erste Glied vom zweyten, und das dritte vom vierten Glied abzieht. Z. E. 3 : 5 — 6 : 8. Ziehe ich nun 3, das erste Glied vom zweyten Glied 5 ab, so ist der Differenz 2, und ziehe ich das dritte Glied 6, vom vierten Glied 8 ab, so ist ebenfalls der Differenz 2. 3 ÷ 5 = 2, 6 ÷ 8 = 2.

93) Eine Arithmetische (Proportio discreta) ist diejenige, in welcher das zweyte Glied in der ersten arithmetischen Verhältniß von dem ersten Glied der zweyten arithmetischen Verhältniß verschieden ist. Z. E. 3 : 5 = 6 : 8. Das zweyte Glied (5) der ersten arithmetischen Verhältniß, ist von dem ersten Glied (6) der zweyten arithmetischen Verhältniß verschieden.

Anmerkung. Man kann die arithmetische Proportion auch umkehren, und sagen: 5 : 3 — 8 : 6 alsdann ist, wie aus diesem Exempel zu ersehen, das erste Glied größer als das zweyte,

und das dritte größer, als das vierte Glied, nur müssen allezeit die Diff renzen gleich seyn.

94) Die Aehnlichkeit und Gleichheit zwoer geometrischen Verhältnisse ist eine geometrische Proportion (proportio geometrica) z. E. 2 : 4 — 6 : 12. Man spricht: um wie vielmal das zweyte Glied (4) mehr ist, als das erste Glied (2), um eben so vielmal ist das vierte Glied, (12) mehr, als das dritte Glied (6). Also eben so, wie (nach unserm Exempel) 4, 2mal mehr ist als 2, eben so ist 12, 2mal mehr als 6.

Anmerkung. Man kann die geometrische Proportion, nur müssen die Exponenten gleich seyn, umkehren, z. E. 5 : 15 — 6 : 18 umgekehrt also 15 : 5 — 18 : 6. (Siehe Anmerk. §. 93.)

95) Eine geometrica proportio discreta ist diejenige, in welcher das zweyte Glied in der ersten geometrischen Verhältniß vom ersten Glied in der zweyten geometrischen Verhältniß verschieden ist. Z. E. 2 : 4 — 6 : 12. (S. zur Erläuterung §. 93.)

96) Wenn das zweyte Glied in der ersten Verhältniß dem ersten Glied in der zweyten Verhält=

hältniß einer Proportion einerley sind, so heißt sie eine zusammenhängende Proportion (proportio continua), dieses ist sowohl von der arithmetischen als geometrischen Proportion zu verstehen. Exempel von beyderley Proportionen.

a) arithmetische Proportion.

3 : 5 — 5 : 7 oder 7 : 5 — 5 : 3.

b) geometrische Proportion.

2 : 4 — 4 : 8 oder 8 : 4 — 4 : 2.

Anmerkung. Auch wird öfter eine solche proportio continua nur mit 3 Gliedern geschrieben. Z. E. 3 : 5 : 7, 3 : 6 : 9, 2 : 4 : 8.

97) Wenn eine (proportio continua) mit mehrern daran gehängten Verhältnissen immer fortgesetzt wird, so entstehet daraus eine Progression.

98) Eine arithmetische Progression ist eine ganze Reihe fortgesetzter arithmetischer Verhältnisse, und zwar in proportione continua arithmetica. Z. E.

3 : 6 — 6 : 9 : — 9 : 12 — 12 : 15 — 15 : 18 — 18 : 21 — 21 : 24 — 24 : 27 u. s. w.

Anmerkung. Kürzer wird eine Progression also geschrieben.

3: 6: 9: 12: 15: 18: 21: 24: 27.

Noch

Noch ein Exempel.

$3^{2}\ 5^{2}\ 7^{2}\ 9^{2}\ 11^{2}\ 13^{2}\ 15^{2}\ 17^{2}\ 19^{2}\ 21.$

99) Eine geometrische Progression ist eine Reihe Zahlen, welche in geometrischer proportione continua fortgesetzt sind. Z. E.

$2^{2}4 — 4^{2}8 — 8^{2}16 — 16^{2}32 — 32^{2}64$ u. s. w.

Anmerkung. Kürzer wird eine Progression also geschrieben.

$2^{2}\ 4^{2}\ 8^{2}\ 16^{2}\ 32^{2}\ 64.$

100) Wenn zwey Verhältnisse, sowohl arithmetische als geometrische, einem dritten Verhältnisse gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

Anmerkung. Sind die zwey ersten Verhältnisse arithmetisch, so muß die dritte Verhältniß auch arithmetisch seyn, sind sie aber geometrisch, so ist die dritte allerdings auch geometrisch.

Exempel und Erläuterung.

$3^{4}12 — 1^{4}4$
\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-
1 4 — 5 20
\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-
3 12 — 5 20

Wie sich 3 zu 12 verhält, so verhält sich auch 1 zu 4, und 1 verhält sich zu 4, wie sich 5 zu 20 verhält, daher verhält sich 3 zu 12, wie 5 zu 20, nach dem Exponenten 4.

Mit

Mit Buchstaben.

$$\underline{A \overset{e}{\;} B - C \overset{e}{\;} D}$$

$$\text{Nun } \underline{C \overset{e}{\;} D - E \overset{e}{\;} F}$$

$$\text{Also } A \overset{e}{\;} B - E \overset{e}{\;} F$$

101) Wenn zwey Zahlen durch eine dritte gleiche Zahl multiplizirt werden, so verhalten sich die Produkte wie die multiplizirten Zahlen.

Erläuterung

Wenn man die zwey Zahlen, z. E. 4 und 8, durch 4 multiplizirt, so ist das erste Produkt 16, den 4 × 4 = 16, und das zweyte Produkt ist 32, denn 8 × 4 = 32, 16 stehet nun mit 32 in eben dem Verhältniß wie 4 und 8.

Beweis.

1) Wenn die Exponenten gleich sind, so sind auch die Verhältnisse einander gleich.

Nun sind die Exponenten zwischen 4 : 8 und zwischen 16 : 32 gleich.

Also bleibt eben die Verhältniß zwischen den zwey Produkten 16 und 32, welche zwischen 4 und 8 war, die mit 4 sind multiplizirt worden.

2) So viel Einer der Exponent hat, so vielmal ist das größere Glied größer, als das kleinere Glied.

Nun hat der Exponent 2, 2 Einer in unserm Exempel.

Also ist das größere Glied (8) um 2mal größer als das kleinere Glied (4).

102) Es müssen sich die Quotienten von zwey dividirten Zahlen, die mit einer dritten dividirt werden, eben so verhalten, wie die dividirten Zahlen, weil diese Quotienten eben den Exponenten haben, den ihre dividirten Zahlen haben. Z. E. Wenn man 12 mit 4 dividirt, so kommt der Quotient 3 heraus, 4: 12 | 3

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

und wenn man 24 mit 4 dividirt, so kommt der Quotient 6 heraus. 4: 24 | 6 Nun ist

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

zwischen dem Quotienten 3 und 6 eben der Exponent 2, der zwischen 12 ² 24 ist, also verhalten sich die Quotienten eben so, wie die Dividendi.

103) In einer geometrischen Proportion ist das Produkt des ersten Glieds in das vierte Glied gleich, dem Produkt aus dem andern in das dritte.

Exempel.

4 : 8 — 2 : 4		a : b — c : x	
2	4	c	a
16	16	bc	ax

Beweis.

Wenn die Factores gleich sind, so müssen auch die Facta gleich seyn.

Nun sind die Faktores gleich.

Also müssen die Facta gleich seyn.

104) Wenn drey Zahlen in Proportion stehen, so, daß die zweyte zwo Stellen vertritt, so ist das Produkt der beyden äußersten Glieder der Quadratzahl der mittlern gleich.

Erläuterung.

2 : 4 — 4 : 8		oder kürzer 2 : 4 : 8	
4	8	4	2
16	16	16	16

Die beyden äußersten Glieder sind 2 und 8, diese miteinander multiplizirt $2 \times 8 = 16$, die-

ses Produkt 16, ist die Quadratzahl des mittlern Glieds 16, wenn 4 mit sich selbst multiplizirt, wird 4 × 4 = 16 vollkommen gleich.

105) Wenn 4 Zahlen in Proportion stehen, so verhält sich auch wechselsweise wie die erste zur dritten, so die zweyte zur vierten.

Erläuterung.

$2 \quad 4 - 4 \,^{2}\, 8. \quad 2 \,^{3}\, 6 - 4 \,^{3}\, 12.$

Beweis.

Multiplizire ich das erste Glied 2 durch den Exponenten 2, so kommt das dritte Glied, multiplizire ich das zweyte Glied durch den Exponenten, so kommt das vierte Glied heraus.

Wo die Exponenten gleich sind, da sind auch die Proportionen gleich.

Nun sind in diesem Verhältniß des ersten zum dritten, und des zweyten zum vierten Glied, die Exponenten gleich.

Also muß die Verhältniß des ersten und dritten Gliedes gleich seyn der Verhältniß des zweyten und des vierten Gliedes.

106) Wie finde ich zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl?

Auf-

Auflösung.

a) Die beyden gegebenen Zahlen werden durch einander multiplizirt, sie seyen z. E. 16 und 144.

b) Aus dem Produkt derselben 1304, ziehe man die Quadratwurzel (nach §. 72) so hat man die verlangte Zahl.

16 ' 48 — 48 ' 144 oder 16 : 48 : 144.

Beweis.

Das Factum der beyden äußersten Glieder, z. E. 16 und 144 ist nämlich 1304, dieß Factum ist aber zugleich das Factum der beyden mittelsten Glieder. Da man aber nach der Aufgabe die mittlere geometrische Proportionalzahl in einer geometrischen proportione continua suchen sollen, diese aber mit sich selbst multiplizirt, als zweymal gesetzt, eigentlich zum Produkt ihr Quadrat giebt, welches dem Produkt der beyden äußersten Glieder gleich ist, so muß ich aus diesem Produkt die Quadratwurzel ziehen, und diese ist alsdann die mittlere geometrische Proportionalzahl in proportione geometrica continua.

107) Wie finde ich zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl?

Auf=

Auflösung.

Die drey gegebenen Zahlen seyen z. E. 5, 12, 18.

a) Man multiplizire die andere durch die dritte gegebene Zahl z. E.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 18 \\ \hline 96 \\ 12 \\ \hline 216 \end{array}$$

b) Mit der ersten gegebenen Zahl dividire man in das Produkt der zweyten und dritten Zahl, so ist der Quotient die vierte zu findende Zahl. Z. E.

$$\begin{array}{r} 5 : 216 \mid 43\frac{1}{5} \\ 20 \\ \hline 16 \\ 15 \\ \hline \frac{1}{5} \end{array}$$

also $5 : 12 — 18 : 43\frac{1}{5}$

108) Wie finde ich zu zwey gegebenen Zahlen die dritte geometrische Proportionalzahl?

Auflösung.

a) Man multiplizire die andere gegebene Zahl durch sich selbst.

b) Dividire mit der ersten gegebenen Zahl in das Produkt der mit sich selbst multiplizirten andern gege-

gegebenen Zahl, so ist der Quotient die dritte geometrische Proportionalzahl.

Exempel.

Die zwey gegebenen Zahlen seyen,

```
4 und 24        24
                24
               ----
                96
               48
               ----
           4 : 576 | 144
               4
               ----
               17
               16
               ----
                16
                16
               ----
                 0
```

also 4 ˙ 24 — 24 ˙ 144 oder 4 ˙ 24 ˙ 144.

Beweis zu 107 und 108.

Das Factum aus den beyden äußersten Gliedern ist dem Factor der zwey mittlern Glieder gleich. Nun hat man aber noch nicht das vierte Glied, sondern es ist erst noch zu finden, daher kann man auch das Factum der beyden äußersten Glieder noch nicht wissen; da aber das Factum der beyden mittelsten Glieder dem Factor der beyden äußersten Glieder völlig gleich ist, und die beyden mittelsten Glieder gegeben sind, als Factores, so

darf

darf man nur sie zusammen multipliziren, dann giebt mir dieses Produkt auch sogleich das Produkt der beyden äußersten Glieder. Man findet aber aus einem Produkt den andern noch unbekannten Factor, wenn der eine Factor schon bekannt oder gegeben ist; nun ist das Produkt des zweyten und dritten Gliedes ein solches Produkt, und das erste Glied ist der bekannte Factor, folglich darf man nur mit dem ersten Glied in dieß Produkt des zweyten und dritten Gliedes dividiren, so giebt der Quotient das vierte Glied.

Berichtigungen.

Seite 11 Linie 5 von unten ließ als der größern Zahl.
— 17 — 16 streiche werden nach multiplizirt hinweg.
— 19 — 1 lies kleinere und Linie 2 ließ größern.
— 24 — 6 ließ die Einer.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karrer, Philipp Jakob,

Anfangsgründe der arithmetischen Wissenschaft auf mathematische Gründe und Vernunftschlüsse gebaut, für Jünglinge

Leipzig und Dünkelsbühl 1792

Math.p. 249
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082116-1
VD18 14231824